國小數學 6下 講義
暨 國一先修教材

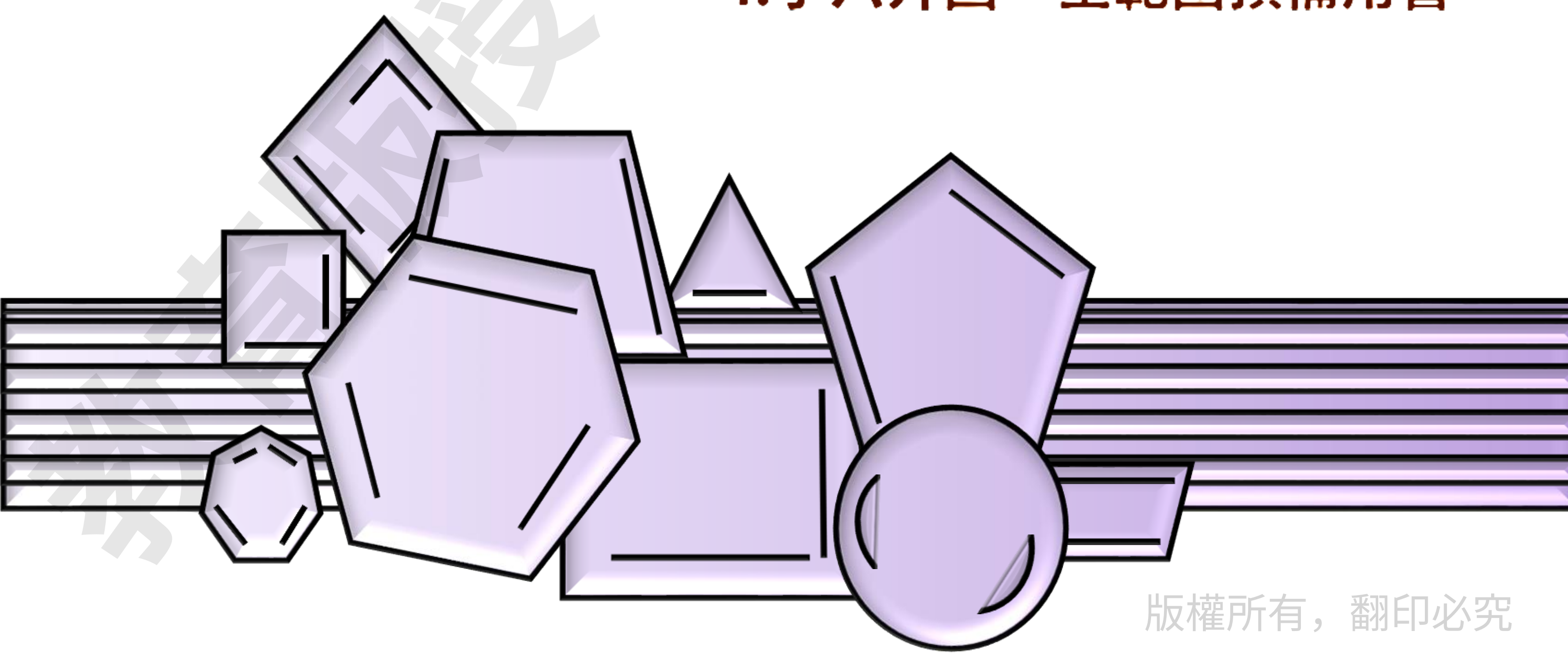
B本

揚帆啟航前的準備之路

2024年前各版本適用

領先4先行

1.2030雙語國家試行
2.108課綱素養先行
3.概念延伸強化
4.小六升國一全範圍預備用書



杲踹文化

目次

第 8 章 文字推理

第 9 章 日常生活中的字詞

第 10 章 學習的心態與診斷

第 11 章 數線、負數、絕對值

第 15 章 圖的複製

第 16 章 綜合訓練

第 8 章 文字推理

在小學的進度告了一個段落後，接著是國中的課程，在開始介紹新的內容前，我們要先問問自己「什麼叫做國中呢」，「為什麼要念國中呢」及「國中要學什麼呢」、「你對自己未來這三年有怎樣的期待呢」，這些都是沒有「標準答案」的問題，無論你回答的好與壞都是「相對性的」(你覺得好，別人不一定覺得好；你覺得這樣差，別人反而覺得這樣才對)，但是比較怕的是「沒有想法(no idea)」的態度，因為你沒有想過去思考過這些問題；及另一類草草思考過就寫下這些答案的同學，他們很快地說出這些答案，然後就忽略了、之後就不管了，態度會影響一個人完成一件件事情的水平，而一件件事情成就一個個事件最後決定人生的高度。

這些問題答案，一直都是可以改的，初入國中時，我的答案或許不適很好，幾個月後、幾個禮拜後，我可以修改答案。並以此修改我對自己的「指導方針」，都是不停地修正，調整到自己、父母、師長、社會都是接受的。

若你已對上述問題都有了想法，我們便自主前進課程吧。什麼!?難道你要等開學再開始學習，你想要的東西會要等嗎，自己學嘗試去拿吧，Let’s go!!

a. 文字邏輯

數學是科學溝通的語言，它在演變成今天你知道的什麼比例尺、分數小數、體積、統計圖表前，它是由邏輯(logic)、符號(symbol)變成了語言，再與自然語言(生活用語)共同描述問題與解決問題

中發展了幾個領域派別。在本書中的幾個章節會針對底子的進行訓練，對開始學習上可以產生更有效的幫助。

在中文中，我們口語或是文章中的每一句話都可以分成「敘事句、表態句、有無句、判斷句」四大類，而英文中則分以「敘述句、疑問句、祈使句(命令) 、感嘆句(驚嘆)」四大類。

◎敘事、敘述句，是描述一件事情的句子，由主語、述語、賓語等組成。

例如:爸爸昨天洗車。

◎表態句、感嘆句，表示物體的狀態，由主語與形容詞組成。

例如:多美麗的花。

◎有無句，表示有或沒有的句型，由主語、述語(有、無)、賓語組成。

例如:你怎麼沒有出去玩呢?

◎判斷句，對事物作一是非的描述，須讀者讀後心內產生贊同或否定的句型。

例如:讀書是看天份的。

諸如上述這些句型中，數學語言有哪些句型呢?

在數學中，只有一種語言即是「敘述句(statement)」，用以「長、寬、高及體、面積」描述物體的大小；用整數、分數、小數描述物體數量等等。

◎至於疑問句等，我們則借日常生活的自然語言輔助說明。

例如:3＋5＝8，對嗎?

在這個小節中，我們針對這些「話語」進行邏輯的思考。

敘述句，只能是「眞(true)」或「假(false)」的，不能同時是眞的又是假的。

而不能判斷是眞假的敘述句，則稱它為開放語句。那什麼是邏輯呢? 我們可以簡單地想就是它有「道理」，在數學中特指有無符合「有效地推論」。

例如:甲比乙還重，乙又比丙還重，則你宣稱三者之中丙是最重的，是不符合邏輯的。

小試身手:

請寫出下列(底線)的否定敘述(negative statement):

(1)人類能生活在地球上是因爲有氧氣。

( )

(2)至少 10 人失蹤。( )

(3)沒有人不會這題數學。( )

(4)這次考試至少有 3 個人及格。

( )

◎兩個以上敘述用連接詞「或(or)、且(and)」成一個新的敘述，稱它複合敘述。

例如:媽媽買了 3 個或 5 個蛋糕、2 是質數且還是偶數。

但是複合敘述，有可能會有一些問題，當我們連接詞是「且」時，敘述中只要其中一個是假的，而整個敘述句就是假的。

例如:甲比乙大且(甲+10)比(乙+10)小，這個敘述中甲比乙大成立，則後面甲乙各加 10 後，(甲+10)要比(乙+10)大，則我們說這個敘述是假的。

例如:2、3、8 是質數，「、(頓號)」和「和」在中文中有「且」的意思，在這裡這個敘述是假的，因為 8 並非質數。

(原敘述句應該寫成:2 是質數，且 3 也是質數，且 8 也是質數的敘述句，這邊直接以合併的方式呈現出來)

例如:2、3、7 是質數，則這是一個敘述句，且敘述為眞。

若每個敘述為眞，以「且」連結後的敘述依然會為眞。若有眞與假的敘述，以「且」連結後的敘述會成假。若都是假的敘述以「且」連結後的敘述結果依然為假。

若我們以「或」連結後的敘述呢?

若是兩個以上敘述為眞的敘述相連，依然會為眞。

例如:3 或 5 是質數。3 和 5 都是質數，因此敘述依然為眞。

若是將敘述一眞一假以「或」相連，則敘述依然為眞。

例如:3 或 4 是質數。則這敘述中，只要有其中一個滿足為眞的條件，整個敘述依然是眞。

若都是敘述為假的敘述以「或」相連，則敘述依然為假。

註:否定敘述與敘述為假是兩件不同的事情，不要搞混了。

小試身手:

寫出下列敘述的否定。

(5)「$3 \neq 3$或甲 < 3」。 (   )

(6)哥哥身高比爸爸或弟弟高。(   )

(7)甲小於 10 且甲大於 1。 (   )

(8)每個人都有父母。 (   )

◎若兩個敘述句之間是有一個「因果」關係的，以「若…，則…」(If…，then…)型式的敘述，我們會稱它命題(proposition)。註:我們習慣以「若 P 則 Q」來指命題這件事，記作 P→Q，若命題為眞則記作 P⇒Q。

例如:如果明天下雨，我就不出去了。

例如:若考試簡單，則所有人都可以及格。

我們將(P)命題的前面，稱為假設(前提)，後面(Q)稱為命題的結論。

則有命題，也會有「逆命題」，即「若 Q 則 P」。

套用上面的例子則:

例如:如果我明天不出去，則明天下雨。

例如:若所有人考試都可以及格，則考試簡單。

原命題和逆命題是完全相反的(因果)情況，且一般情況下「若 P 則 Q」成立(命題為眞)，則「若 Q 則 P」不會成立(命題為假)。

小試身手:

請判斷下列各命題的眞僞: (若命題爲眞請以O表示，命題爲假請以X表示)

(9)(　　)若甲×乙= 0，則甲= 0或乙= 0。

(10)(　　)若甲×乙= 0，則甲= 0且乙= 0。

(11)(　　)若甲×乙≠ 0，則甲＝ 0或乙＝ 0。

(12)(　　)若甲＝ 0或乙＝ 0，則甲×乙＝ 0。

在上面的練習中，不知道各位有沒觀察到第一小題與第四小題就是前文所說的「特殊情況」，「若 P 則 Q」與「若 Q 則 P」同時成立。

我們再舉一個例子:

若三角形三邊等長，則它就是正三角形。

與　　若它是正三角形，它三邊等長。

這種情況，倆著敘述句是順著去、逆著回來都是對的時，我們稱這兩敘述句是「等價」(有著相同的價值)。

有了「等價(equivalence)」關係，就可以解決了數學語言中的「換句話說」，在例子中:「若所有人考試都可以及格，則考試簡單。」我們試圖去找它的等價的命題，「若 P 則非 Q(Q 的否定)」、「若非 P 則 Q」、「若非 P 則非 Q」、「若 Q 則 P」、「若 Q 則非 P」、「若非 Q 則 P」、「若非 Q 則 P」。

在一系列的討論中(有興趣的同學，可以深入研究，關鍵字:眞假値表)，找到了「若 P 則 Q」等價命題是「非 Q 則非 P」。

在上述的例子，馬上找到一個(若非 Q 則非 P)等價命題即是「若考試困難，則所有人都不及格」。

例如:「如果明天下雨，我就不出去了」。

則等價「若明天我出去了，則明天沒下雨」。

註:等價命題會有很多個，但是直觀的以原來敘述些微改動的(改否定)就是目前介紹的非 Q 則非 P。(註:也因此若非 Q 則非 P 也稱為否命題)

或許有時候，不是很清楚若 P 則 Q 命題的意思，不妨換個非 Q 則非 P 來思考吧。

小試身手:

請寫出下列命題(若 P 則 Q)的等價命題(若非 Q 則非 P)

(13)若是正三角形，則必是等腰三角形。

( )

(14)若明天沒下雨，則不帶傘出門。

( )

(15)若甲×乙≠ 0，則乙≠ 0。( )

(16)若班上都考 80 分以上，則老師請客。

( )

(17)若長與寬為 5 公分，則它的面積會小於 100 平方公分。

( )

(18)若將一袋糖果平分給 6 個人，則每個人分不到 7 顆。

( )

(19)根據「若遇到段考，則沒有作業」，下述合乎邏輯的有( )。

(甲)若沒有作業，則是遇到段考。

(乙)若有作業，則不是段考。

(丙)若沒有遇到段考，則沒有作業。

(20)依「若沒搭這班公車，就不會遲到」，以下敘述是合乎邏輯的? (　　　　)

(甲)搭這班公車必定遲到。

(乙)若遲到，必沒搭這班公車。

(丙)若沒遲到，必沒搭這班公車。

補充:三一律，在敘述相同事情(事件)的情況下，若發生甲>乙且又乙>甲，則我們說甲=乙。

指兩者關係中，勢必是「甲>乙、甲<乙、甲=乙」三種中的一種，在數線上若有一點甲，則乙必會在甲的左邊或是右邊、或甲和乙為同一點。

補充:遞移律，在敘述相同事情(事件)的情況下，若發生甲>乙且又乙>丙，則我們說甲>乙>丙。

遞移，指傳遞移動的關係，比較同樣事情去做了之後，將結果連結彼此之間的關係。兩個定律，在我們邏輯中，我們或許可以直覺地想到，在這邊補充它是有邏輯性的。

b. 文字符號

在過去數學的學習中，數字的計算是數學學習最重要的課題。中學階段起，代替數字的符號，它可以簡化數字及算式的繁雜，代數會成為另一項重點的學習對象。在那之前，我們先習慣「符號」吧。在數學中我們習慣使用的符號是英文字母及希臘字母，它可以代表一個數字、代表一件事情、或是代表一個單位等等。

例如:爸爸身高 160 公分，媽媽身高 160 公分。

若以 H 代表數字 160，則例子改寫成:

「爸爸身高 H 公分，媽媽身高 H 公分」。

除了在數學上的好處外，在商業、情報及高隱私的交換資訊時，以符號代換的手法更是效果非凡，也就是我們現在所說的「密碼」，也稱「代數密碼學」。

例如:英文「I love math.」我喜愛數學，我們將這句話進行一些步驟後(加密)，讓它變成密文。

規則一:所有出現的字母向右移動二位表示，例如:a 變成 c，b 變成 d，z 變成 b。

規則二:大寫字母改以小寫字母表示，並在大寫字母下加上雙底線。

規則三:空白以「*」表示，逗點以「-」表示，句點以最後一個字加底線表示。

則我們得到「k*nqxg*ocvj」，是不是就是要懂加密規則的人才能馬上看得懂了呢?

小試身手:

(1)請依據上述規則(一~三)，加密「Hello,Jack.」

答: (   )

補充:在中文的發展中，我們的密碼學發展則以藏在文章中，例如每句話的第二個字(或再加以諧音)，「觀察了星空後，昨夜熒惑星守星，逾三刻鐘，不禁令人擔心今年的生意」可得到「茶葉三斤」的密語；或是以某書(作為密碼本)直接寫上頁數及第幾段第幾個字，例如:「12 4 6」，代表第 12 頁第 4 行的第六個字。

數字的代替上，我們今天使用的紙鈔、硬幣就是這樣的例子。若拿二張面額是 500 元的紙鈔，則它代表500×2，共一千元的價值。若我們給它以符號代替 1000 元是 A、500 元是 B、100 元為 C、50 元是 D、10 元是 E。

則你身上有一個 A、二個 C、五個 D，則代表你有

$1000 + 2 \times 100 + 5 \times 50$，共 1450 元。

小試身手:

(2)根據上述規則，今年紅包共收到「7A、1B、4D、3E」，共 (　　　　　)元。

符號

符號也可以表示「運算」，像是我們使用「加減乘除、等於和大、小於」等等，都是代表兩者敘述之間的一種關係，我們也可以依據我們的需要訂定運算規則，例如:「甲☆乙=(甲+乙)×甲」，則 6☆2= $(6 + 2) \times 6 = 48$。

小試身手:

若新的運算符號「☆」，其運算規則:「甲☆乙=(甲+乙)÷(乙−1)」，則:

(3) 7☆5=(　　　　)。

(4) 35☆(3☆2)= (　　　　)。

我們也可以將數字轉成符號，下表為希臘字母，共 24 的字母，有大小寫之分。上排為大寫、下排是小寫。(順序:由左而右、由上而下) 其中前三個或許大家比較熟悉，α (阿法 alpha) 、β (貝塔 beta)、 γ (伽馬 gamma)。

Α	Β	Γ	Δ	Ε	Ζ
α	β	γ	δ	ε	ζ
Η	Θ	Ι	Κ	Λ	Μ
η	θ	ι	κ	λ	μ
Ν	Ξ	Ο	Π	Ρ	Σ
ν	ξ	o	π	ρ	σ
Τ	Υ	Φ	Χ	Ψ	Ω
τ	υ	φ	χ	ϕ	ω

例如:我們將 24 進位制的小時制進行轉換，以希臘字母小寫作為小時代表，α 指凌晨零點、γ 指凌晨三點、ν 指正午 12 點等等。

小試身手:

請根據上述規則，回答(5)、(6)題。

(5)β過了五個小時是(　　　)點，記作(　　　)。

(6)χ是(　　　)點，它 12 小時前是(　　　)點，記作(　　　)。

補充:現在流行的戲劇、動漫畫中那些看似很酷的語言，例如:日文、中文、韓文透過羅馬拼音(像是你的直譯英文名字)，對照一些國家的語言進行轉換及一些規則的制度，就可以創造出很酷的「神祕語言」囉。

例如:火球術，羅馬拼音(威妥瑪拼音)「huo chiu shu」，再對照南印度泰盧固文翻譯成「హ ఉ ఒ చ హ ఇ ఉ స హ ఉ」。

在現今實際上的應用，我們常以英文與數字一起使用的編碼，例如:電腦中文字的編碼 Big5 碼、英文字的編碼 ASCII、顏色的色碼(例如: #808080)等等。但其實有些符號除了「替換」的用意之外，更可以進行數學的計畫，我們在未知數的篇章中會帶大家重新認識符號。

c. 文字重整

未來的學習中，中文、英文與數字、符號、圖形夾在出現在一起，將其重新整理過，是做筆記的重要課題。或是將題目重新改寫，讓題目可以解讀快一點，因為人類透過視覺將一個區塊讀進大腦，效率比較雜亂無整理的文章，需要一行行又一個個字去讀好。

例如:

教育部針對「素養」的意象(意象，被組織的客觀印象)一詞，給的解釋: 「十二年國民基本教育之核心素養係強調培養以人為本的「終身學習者」，包括「自主行動」、「溝通互動」、「社會參與」三大面向，以 及「身心素質與自我精進」、「系統思考與解決問題」、「規劃執行與創新應變」、「符號運用與溝通表達」、「科技資訊與媒體素養」、「藝術涵養與美感素養」、「道德實踐與公民意識」、「人際關係與團隊合作」、「多元文化與國際理解」九大項目。學生能夠依三面九項所欲培養的素養，以解決生活情境中所面臨的問題，並能因應生活情境之快速變遷 而與時俱進，成為一位終身學習者。」

文字整理的第一步:找出核心重點

在上述例子中，「素養培養」、「三面九項」是我們所抓住的核心，「文章講述最核心的問題是什麼」、「支撐文章的柱子有幾根」是要先抓住的核心。

若搞錯了重點，則會搞不清楚作者表達意思，更可能還會錯誤解讀了作者原來意思。

文字整理的第二步:分類&整理

將整個文依照上述的核心重點，將相關的文給整理出來。

「素養培養」：學生能夠依三面九項所欲培養的素養，以解決生活情境中所面臨的問題，並能因應生活情境之快速變遷 而與時俱進，成為一位終身學習者。

「三面」:「自主行動」、「溝通互動」、「社會參與」

「九項」：「身心素質與自我精進」、「系統思考與解決問題」、「規劃執行與創新應變」、「符號運用與溝通表達」、「科技資訊與媒體素養」、「藝術涵養與美感素養」、「道德實踐與公民意識」、「人際關係與團隊合作」、「多元文化與國際理解」

這些文字或許有參雜冗字、或是我們可以更精簡它。

例如:

「素養培養」：依三面九項培養，解決生活中的問題，成為終身學習者。

「三面」:「自主」、「溝通互動」、「社參」

「九項」:「身心素質與精進」、「系統思考與解問」、「規劃執行與創新」、「符號與溝通表達」、「資訊與媒體素養」、「藝術與美感」、「道德與意識」、「人際與團隊」、「國際多元文化」

文字整理的第三步:排版(type-setting)

1.不切斷換行

在例子中，我們可以看見重要的一個名詞被切成兩段分在句尾及下一行的句首。在數學中，也可能發生這樣的情況話，勢必造成計算上的困擾，因此式子我們都盡量不要有切斷換行書寫的情況。

切斷換行，也會造成視覺上的慢速、及大腦要連結兩個詞彙的時間差，造成讀取效率大大的降低。

2.同類的對齊

將同樣類別的事項，以齊頭、行列、甚至給上編號，都對大腦的讀取有加速的效果。

例如:

一.　　ooo

　1. 正正正

　2. 正正正

二.　　ooo

　　正正正

　　正正正

排列的規則，可以試想一個題目下方有口訣、有重點、有提示、有想想看…過多的副標題，整個版面非常混亂。如果真的需要一個提醒、提示的部分，應該有規則的放進版面中。

我們實際將上面例子排版:

「素養培養」: 依三面九項培養，解決生活中的問題，成為終身學習者。

「三面」:「自主」、「溝通互動」、「社參」

「九項」:「身心素質與精進」、「系統思考與解問」、

「規劃執行與創新」、「符號與溝通表達」、

「資訊與媒體素養」、「藝術與美感」、

「道德與意識」、「人際與團隊」、「國際多元文化」。

3.字體大小、工整與空間

首要，一定要保留空白的地方，未來可以是補充或是追加寫入的地方。若將這些補充與追寫的部分以拉線條的方式，整個畫面會顯得混亂，適度的空白也會讓你在讀時不會感到這麼壓力緊張(可以試想，滿滿字的畫面找不到你要的關鍵字)，我們在文字整理時，空白的保留也是要注意的。

次要，很多人字跡會過於潦草，心想反正是我自己要看的，隨便寫沒關係。但過了一會兒，自己回過頭卻也不知道自己寫了什麼。

字體大小的控制，過大或過小的字都會對你尋找關鍵字時有害，眼睛對於較大的字與較小的字，眼睛(瞳孔)所對焦的不一樣，變得你眼睛很累，像是相機鏡頭等下 3 倍、等下 0.5 倍，眼睛疲倦精神壓力也會比較大。

4.顏色與圖示重點標記

在需要特別注意、特別要用到的地方，以「畫底線」、「圈起來註記」、「標上星號☆、箭頭↓、雙圈號◎等個人習慣重要記號」、「不同色筆、粗筆」都可以讓你快速地找到重點所在。

這邊還有一個重點，自己要有自己一套習慣的標示法，它需要長時間的培養習慣，不然我們就會看到每個地方都是不同的標記、符號的混亂使用。

顏色的使用，有些人可以容忍三色、二色，這些都是需要花很長一段時間不斷調整自己，找到適合自己的文章結構。

(文字整理的第四步:ch15 章中，若有必要則可以進行圖像化)

版面的保持，若是筆記用及考試用的整理，若直接將在整理好的文字上進行塗鴉、計算，等回過頭發現錯誤、計算錯誤時，整理好的文字已經都沒有再次使用的機會，務必要注意這點。

在考試中，重新整理題目的動作，同時使自己冷靜下來檢視題目與自我暗示自己做得到的，在整理的同時可以讓自己找到一時之間遺漏的線索、去回想起相關的記憶，是重要的考試技巧。

小試身手:

請將下列敘述進行文字整理:

(1) 大概過去你曾聽說過：以車子代步、處理桌上滿滿文件、緊盯電視的生活型態對我們的健康可能是很有害的。很多疾病風險的增加與長時間坐在椅子上不動有關，因此專家將這些致使於現代疾狀通稱爲「久坐病」。

坐過久將減緩身體代謝速度及酵素分解脂肪的速度，還會導致血糖與血壓的升高。若一天中有少量、規律的運動，即使只是站著或到處晃晃，卻足以將升高的血壓和血糖降低至之前的正常

值。假使兩、三分鐘的輕微運動，加起來若有半小時之久，功效與一次三十分鐘的運動無差異。但若少了這些活動的話，血糖與血壓會逐漸升高外，還會持續損壞動脈的內壁並增加糖尿病、心血管疾病、中風等重大疾病的風險。通常來說，長時間坐著將導致生理機能的重大改變。

但是等等，若你是個經常跑步的人。因爲有規律運動，可以不用擔心久坐這類型態引起的傷害。嗯，別急。最近有研究資料指出，若一個人每週平均坐著超過64小時，不管他一周是否運動超過建議的150分鐘，都不會達到足以抵銷九小時以上的久坐所導致的傷害。

有沒有嚇得從椅子上跳了起來呢？很好，健康的不二法門就是時不時站起來走動走動。[翻譯大學學測英文]

(2) 某商店將巧克力包裝成方形、圓形禮盒出售，且每盒方形禮盒的價錢相同， 每盒圓形禮盒的價錢相同。阿郁原先想購買 3 盒方形禮盒和 7 盒圓形禮盒，但他身上的錢會不足 240 元，如果改成購買 7 盒方形禮盒和 3 盒圓形禮盒，他身上的錢會剩下 240 元。若阿郁最後購買 10 盒方形禮盒，則他身上的錢會剩下多少元？[國中會考數學題，無須計算]

d. 文字推理

在前面的小節中，我們將文字進行的化簡與整理，除了將所學筆記化外，另外重要的是解決問題。在這個小節中，我們將學習系統化去解決問題，在往後之中漸漸的問題中，慢慢培養出自己的解題策略。

(一)假設法(hypothesis):若所問的問題具有多個的可能性，那麼我們會將其假設出來後，再予以驗證排除的方法。假設的類型常見的有以下兩種:

①依規律假設:雖然我們不確定它真正樣子，以類推、過去經驗去假設或題目需求，將其所有組合列出。

例如:骰公正的 10 元硬幣二次，共會有有些情況呢?

1.第一次正面、第二次正面

2.第一次正面、第二次反面

3.第一次反面、第二次正面

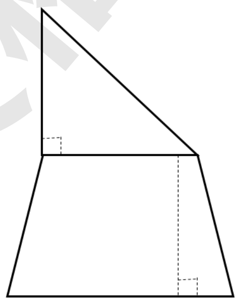
4.第一次反面、第二次反面

②控制假設(assume):若有好幾種情況的考慮下，將多個變動因素給予控制(固定)下，依序列出假設。

在過去雞兔問題中，我們也練習過這種例子，雞兔共有 10 隻，共有 32 隻腳，則假設 10 隻都是兔，則共有 40 隻腳，知道多出 8 隻腳。依照題目調整我們的假設，可以得出當兔子有 6 隻、雞有 4 隻時滿足共有腳 32 隻。

(二)問題分解化:當一個問題是需要滿足多個條件才可以得到，亦或是題目中有可進行分開計算再合併的要素的，透過「拆解工作，分工合作」的概念，將大問題拆成多個小問題，小問題各個解決後，大問題便迎刃而解了。

我們在過去其實也用過這個方法，在求不規則面積、體積時，我們將其以填補或是切割的方式計算出面積及體積。

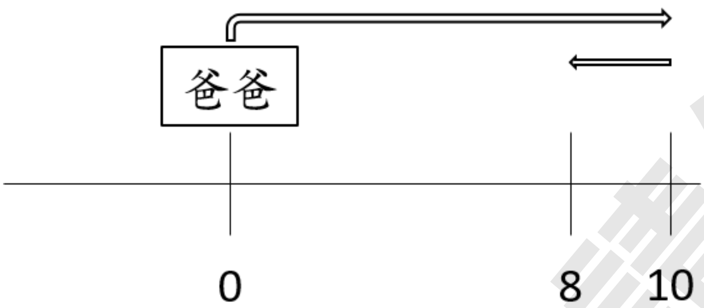


或是題目問總和，你將個別求出來後再加總起來，也是相同的概念呢。

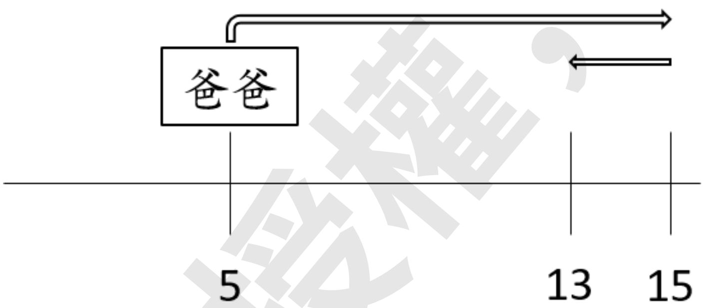
(三)圖像化(image):所問問題若是在文字上與代數計算上，遭遇困難。或許我們考慮將它轉換成「幾何(圖形)」的問題，將其問題帶入坐標、數線、標誌實際大小的空間中，因為問題不只存在想像與文字中，它常也是眞實存在、甚至肉眼可以看到，紙筆可以畫得出來，在國一數學學習坐標後，我們也常以「坐標化」稱呼這個方法。

例如:爸爸向右走了 10 步後，向左走了 2 步。

我們可以將爸爸設置在數線上的「0」的位置:



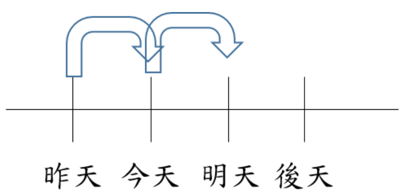
我們也可以將爸爸設置在數線上的「5」的位置:



例如:昨天的後天，是明天的(　)天呢，是後天的(　)天？

答案: 昨天的後天，是明天的當天，後天的昨天，答對了嗎。

如圖，我們也同樣的可以透過數線，透過一天一格的想法，去找出答案。



(四*)已知條件再擴大化:嚴格來說是沒有這項，通常問題都可以透過上述方法處理，但是有可能是條件(線索)的不足才致使問題的解決遇上困境。此時，回過來思考是不是少推敲出什麼條件了，常常我們透過這個步驟提醒自己回過頭檢查題目。

不管我們解題的策略效率好不好，(在這句話中編者也意指問題解法不是就那樣的一種，有二種以上才會有效率好不好的問題)我們在假設、類推、假設排除、計算等等都是依靠邏輯推理的，當我們推理錯誤時可能連帶影響往後所有過程(很常發現一開始就出現假設錯誤，後面全都錯了，大量時間都白白花在上面)。

有三種推理方法，是我們常使用的邏輯推理，分別是:

1.歸納法(推理):在相同性質、類型事物中，去發掘共同一般性的知識的推理，但是要注意的是歸納法的有效性的範圍，例如:有人觀察台灣的烏鴉是黑色的、日本烏鴉是黑色的、菲律賓的烏鴉是黑色，因此我們歸納出世界的烏鴉是黑色的。那麼，這樣的歸納推理是有問題，事實上烏鴉存在藍色、白色、紫色等色系，我們只能歸納說在台灣、日本、菲律賓三地有出現黑色的烏鴉。

2.溯因法(推理):又稱反向推理，回溯原來成因的意思，將看到的結果回推初始的樣貌，並做出最佳的解釋的過程。例如:我們看到一個三角形的內角都是60°，推斷它是等腰三角形、而且三邊等長，是正三角形。

註:在溯因法推理中，依然有有效性的範圍的限制。

3.演繹推理:又稱正向推理，它不同上面兩種邏輯推理，它沒有有效性的範圍的限制。演繹推理建立在「前提」之下，即前面小節文字邏輯中所提的「若 P 則 Q」，我們得到的結論 Q 是建立在 P 成立的前提之下。例如:若三角形分成正三角形、銳角三角形、及鈍角三角形，則有一個三角形不是銳角、鈍角三角形的話，它必是正三角形。

在不同科學學問中有適合的邏輯推演方法，在數學中的推理，幾乎都建立在第三種演繹推理上，我們特別強調「前提」的重要，如各種公式中的限制條件與可以使用的條件，都是極其重要的。

註:定義就像制定遊戲規則般，不能違背規則。因此在數學學科的學習中，我們老是最先去找定義是什麼。

小試身手:

(1)小清、小華、美香三人的爸爸中，一位是醫生、另一位是工程師、教授。請依照下列提示回答問題:

小清:「小華爸爸不是工程師。」

小華:「小清爸爸不是工程師。」

美香:「我爸爸也不是醫生，小清爸爸也不是醫生。」

則小清的爸爸職業是(　　　)、小華的爸爸職業是(　　　)、美香的爸爸職業是(　　　)。

(2)爺爺家中有 200 平方公尺的閒置農地，若種植玉米，一株玉米它需要 10 平方公尺的生長環境，每種一株待作物成熟後收成可賺 320 元；若種植小番茄，一株小番茄需要 15 平方公尺，且每種一株也有 400 元的收入。若兩種作物從栽種到收成的時間是一樣的，爺爺思考怎麼種植兩種作物效益是最高的。(不需考量作物死亡等情形)請依上述內容，回答下列問題:

①兩種作物中，若種植一株收入進行比較的話，種植(　　　)效益較高。

②兩種作物中，若以可種植數量進行比較的話，則種植(　　　)是較多。

③若將全部農地種植玉米，共可獲利(　　　)元；若是種植小番茄，則共可獲利(　　　)元。

④若是將農地以 80 平方公尺種植玉米、120 平方公尺種植小番茄，共可以獲利(　　　)元；若是將農地以 110 平方公尺種植玉米、90 平方公尺種植小番茄，共可以獲利(　　　)元

⑤綜合上述訊息，爺爺最好的決定是種植(　　)株玉米、(　)株小番茄，經濟效益是最好的。

(3)有一盒重 1.25 公斤的存放 50 元的硬幣盒，若一個 50 元硬幣重 10 公克，則硬幣盒共價值(　　　　)元。(請不考慮硬幣盒的重量)

(4)有一直立長竿，若想爬竿每向上 38 公分，則會受到自己體重與地心引力而向下落 2 公分，若身高 160 公分的人，在爬上 5 公尺 40 公分頂端的過程中，共累積下落了(　　　　)公分。

(實際長竿大於 5 公尺 40 公分，竿頂標記爲 5 公尺 40 公分，最後一爬若未達 38 公分也需計算下落)

(5)一個特製正方體骰子平放在桌面上，三人觀察一秒後的說詞如下。

甲:「我這方向看見 1 點、2 點、5 點共面。」

乙:「我在甲的旁邊看頂面是 1 與 2、6 共面。」

丙:「3 點和 4 點共用邊，2 點和 3 點也用共邊」

則骰子上 3 點對面是(　　)點，2 點對面是(　　)點，1 點對面是(　　)點。

e. 練字

寫字，是任何的學習開始的第一步，手對於筆的控制能力，有的人寫字很快、寫得字非常漂亮、一行行間隔有序；有個人寫字較慢、字跡凌亂(scribble)。在寫字的問題中，也在暗中影響每個人的學習，也影響需要呈現自我想法的數學學科上有很大的影響。

因為字跡不好看，使自己對於寫得出來的字有所疑慮，寫出來的字跡使自己自卑而減少寫字的惡性循環。

因為寫得慢，計算速度自然受大極大的限制，在日常學習中也會產生障礙，例如:上課中無法完全寫出足夠的口頭補充。或例如:一張考卷共需書寫阿拉伯數字共一千個，寫得快的同學 10 個數字 3 秒，共需 300 秒(5 分鐘)空白時間在寫數字，寫字慢的同學從 1 到 10 需要 9 秒以上的時間，一場考試中則有 10 分鐘的寫字差距。註:短時間的寫(jot down)

因為字體大小控制不佳，在考卷留白與應用問題的空白，因為大小控制不佳而重新書寫也會造成日常學習與考試一樣非常多時間的消耗。

因此，將字寫好看、寫得快、對於空白處字體的控制，都是需要長時間的培養、修正、不停地練習。練字看起來很遜、很丟臉，但換個角度思考，哪有一種運動和你講講規則你就可以上場了呢，都是需要很長時間的練習後才有那樣精湛的操作。

在數學學科中，0 至 9 與英文 a 至 z 是最基本的，在這個小節中編者將整理未來高頻率抒寫的字，不妨可以針對這些字優先練習。

當然，每一個字都寫漂亮又快也是重要的，畢竟未來也是有作文的。若需要更高強度的練習，可以找硬筆字的本子來練習，一天寫個一兩頁持續三個月便會有可觀成效。

在那之前的我們要先知道，國中起我們開始學著使用鉛筆/自動鉛筆外的筆─原子筆，原子筆和鉛筆不同的是它有筆水乾掉的時間、使用修用液/帶的乾掉時間及覆寫上後蘊染問題，因此在書寫時不像使用鉛筆使用橡皮擦那樣地快速，寫字力量控制上也是不同的。

選筆，找一支適合自己的筆是多數人忽略的問題，大部分的人只想著「外觀」而忽略了它眞正重要的目的。每的人可依手長、掌厚、指粗進行選筆，手長依小指至手腕(可以以第一條線作為基準)的長度是你適合的最長筆長，而最短不要少於這個長度的 3 公分。第二，指頭的粗細，決定你適合拿怎樣粗細的筆，食指與拇指夾握住你所選之筆並以中指上提，輕輕地以斜45°角來回移動，若是較粗的筆你會發現你移動似乎有受到限制，而較細的筆則是比較靈活的。但是也不建議選擇過細的筆，會造成握筆上容易跑掉、掉筆等問題。

至於手掌厚度、大小，決定握筆的高度，同時也會決定你的握筆在該筆的位置，通常是握在止滑區(筆上有一圈圈的凹凸處)，若握在該區筆尖無法正常接觸紙面則該筆不太適合你。

最後是選擇筆芯，它有硬度(例:3B、2B、B、HB)和粗細(例:0.5mm、0.4mm)區分，在鉛筆中很多人偏好 B 與 HB 這種高硬度的筆，但硬度越高則對紙張有不可回復，如刀子劃開紙張的效果，使用橡皮擦擦去碳墨厚依然會有痕跡，大部分的情況都不是很建議使用硬度高的筆芯，反而我們建議使用 3、4B 輕輕寫

就會留下很深(很黑)炭墨的筆芯，因為隨著學習的進行我們要練習寫的東西會越來越多，若能減少對手的壓力，對手的保護也是很重要的。

回到原子筆中的筆芯中，沒有硬度的問題，它只會有粗細的區分，而我們選擇選擇越細的筆芯(例:0.3mm)則寫出的字纖細，在諾大空格中使用過細的原子筆容易產生大量的留白，也容易寫出小字，但是對自己及觀看者的眼睛產生負擔，要斟酌選用。而 0.5mm 以上的筆芯較粗，容易佔滿空間，考慮等待筆水乾掉，你會有大量空間無法使用，也是需要考量使用。

選用好自己的筆，接著就是和它好好培養感情了，每支筆的重心隨著不同字體書寫，重心不斷變換位置，你只有控制得當才能寫出一手好字。

寫字的姿勢，握筆法，這邊就不在講述，但也是一等一重要的課題。

這邊的練習請以原子筆書寫並連續 15 天進行，前 10 天每天各一遍大、小寫英文及數字，以及(左至右)一直行中文字，後 5 天則完成第三部分。

A B C D E F G H I J K L M N O P Q R S T U V W X Y Z

A B C D E F G H I J K L M N O P Q R S T U V W X Y Z

A B C D E F G H I J K L M N O P Q R S T U V W X Y Z

A B C D E F G H I J K L M N O P Q R S T U V W X Y Z

A B C D E F G H I J K L M N O P Q R S T U V W X Y Z

A B C D E F G H I J K L M N O P Q R S T U V W X Y Z

A B C D E F G H I J K L M N O P Q R S T U V W X Y Z

A B C D E F G H I J K L M N O P Q R S T U V W X Y Z

A B C D E F G H I J K L M N O P Q R S T U V W X Y Z

A B C D E F G H I J K L M N O P Q R S T U V W X Y Z

a b c d e f g h i j k l m n o p q r s t u v w x y z

a b c d e f g h i j k l m n o p q r s t u v w x y z

a b c d e f g h i j k l m n o p q r s t u v w x y z

a b c d e f g h i j k l m n o p q r s t u v w x y z

a b c d e f g h i j k l m n o p q r s t u v w x y z

a b c d e f g h i j k l m n o p q r s t u v w x y z

a b c d e f g h i j k l m n o p q r s t u v w x y z

a b c d e f g h i j k l m n o p q r s t u v w x y z

a b c d e f g h i j k l m n o p q r s t u v w x y z

a b c d e f g h i j k l m n o p q r s t u v w x y z

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

第一部分:假設用字

註:礙於篇幅關係，在假設用字中:每第的坐標變半直徑扇圓垂梯；形容用字:大小長寬高矮內外銳鈍快慢輕重；及單位用字:時元噸吋位組杯題包瓶枝輛段粒等等，亦都是數學學科中常見的用字。

設	設	設	設						
則	則	則	則						
為	為	為	為						
或	或	或	或						
最	最	最	最						
且	且	且	且						
因	因	因	因						
故	故	故	故						

所 所 所 所

以 以 以 以

可 可 可 可

能 能 能 能

賺 賺 賺 賺

賠 賠 賠 賠

相 相 相 相

等 等 等 等

第二部分:單位用字

公 公 公 公

里 里 里 里

分 分 分 分

尺 尺 尺 尺

秒 秒 秒 秒

升 升 升 升

克 克 克 克

斤 斤 斤 斤

毫	毫	毫	毫						
顆	顆	顆	顆						
個	個	個	個						
數	數	數	數						
面	面	面	面						
積	積	積	積						
距	距	距	距						
離	離	離	離						
隻	隻	隻	隻						
倍	倍	倍	倍						
箱	箱	箱	箱						
點	點	點	點						
邊	邊	邊	邊						
度	度	度	度						
角	角	角	角						
形	形	形	形						

註:字體在空間大小的配置是不容易直接練習的項目，需要長時間經驗的累積。

Day11

設則為式最且因故所以可能賺賠相等公里分尺

秒升克斤毫顆個數面積距離隻倍箱點邊度角形

$kg\ g\ m^2\ cm^2\ cm\ m\ km\ \pi\ \alpha\ \beta\ \gamma\ \{\ \}\ [\ \ ]$ *and or*

10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25

10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25

Day12

設則為式最且因故所以可能賺賠相等公里分尺

秒升克斤毫顆個數面積距離隻倍箱點邊度角形

$kg\ g\ m^2\ cm^2\ cm\ m\ km\ \pi\ \alpha\ \beta\ \gamma\ \{\ \}\ [\ \ ]$ *and or*

10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25

Day13 (請將 Day12 複寫一次)

Day14 (請將 Day12 複寫一次)

Day15 (請將 Day12 複寫一次)

x x x x x x x x x x x x x x x x x x x x x x x x x x

y y y y y y y y y y y y y y y y y y y y y y y y y y y

註:你在 15 天的練習中，寫錯過幾次呢? 一直寫錯字可能是專注度產生變化的問題，你要趕緊提醒自己要專心一點。

註:寫字速度除了練習問題外，寫錯字重寫問題之外，會不會、熟不熟這個字也是重要的影響原因，因此平時也要多練習其他文字，例如:兌換券的券是「券」還是「卷」呢，常常你還在想這個字時，老師已經開始講述下一句了。

註:寫多快才行呢? 聽寫速度是講者講完一句話，你可以寫出該句話的三分之一至二分之一(一分鐘約 25 字至 35 字)，在現階段就是非常快的，足夠應付考試及聽寫補充老師所講的話了。

第 9 章 日常生活中的字詞

在日常生活中，若沒有類似的經驗的話，常常會不知道別人在說什麼。在應用問題上，我們見著了題目心中響起:「算這個有意義嗎?」、「『這個』是這樣的意思嗎?」，「我們無法與被問題困擾的人有共鳴」與「我不知道題目它在說什麼」是我們常無法欣賞題目的原因。在這個小節中，將會科普一些日後碰到問題常見的術語與常識，若能掌握這些要素，除了我們更能理解應用問題的涵義外，更可以更親身經歷體會我們所在的生活，我們實際碰到過但是我們卻沒看見過它們的問題。

a. 金融(稅與關稅、股票)

在開始之前，我們先介紹「金融(financial)」一詞，原意是「將黃金融化後交易流通」。在政府、個人、機構等的籌資(資金募集)、投資、融資(借錢買股票)的經濟行為，我們稱之金融。提供金融相關的服務，我們則以金融服務業稱呼，即銀行、保險、證券及個人理財等機構企業。

註:我們常聽人家說爸爸在金融業工作，他有可能是在本國銀行、外國銀行、信用合作社、信託投資公司、證券公司、典當公司、保險公司等地方工作。

◎金融體系，指金融機構組成，政府制定法規與市場經濟等情況下所構成的生態系。

而生態系中發展出完善健全的金融制度中，課稅(tax)制度是一個調整體系重要的手段。稅同時也是維持政府運作的資金來源，它可以分為所得稅(income tax)(個人所得、事業所得等)、財產稅(property tax)(贈與稅、遺產稅、房屋稅、使用牌照稅等)、消費稅

(consumption tax)(關稅、貨物稅、營業稅、奢侈稅、菸酒稅等)、流通稅(印花稅、證券交易稅等)等。

◎關稅(tariff)，我們常聽到的課關稅，指得是對外國進口貨物課徵的進口稅。在現行法規中最與我們日常相關的是在跨國的網路購物、網路拍賣上，若滿足:

(一)單筆訂單金額超過新台幣 2000 元。

或 (二)不限金額，半年度進口超過六次。

則會課徵商品金額$\times$ 8%的關稅。

我們或許會想我們買跨國產品，或請人代購而這個關稅，是我們消費者要出嗎? 沒錯，賣方是不一定會自行吸收這筆需要繳納給政府的關稅，賣方可能會將這筆關稅轉嫁給消費者。

我們舉個例子，若在國外購買一個新台幣 3000 元的商品，

國際運費 500 元。

則我們共需要支付$3000 \times 8\% + 500$，共 3740 元來購買這個商品。

不同種類有不同的課稅標準，依照政府劃分而訂定。若我們是賣家，我們除了運費外還要考慮營業稅的部分。

在開始介紹「股票(stock)」一詞時，我們先認識「何謂公司?」，我們常介紹媽媽在OO公司上班，路上看到的商店:OO服裝行、OO茶飲店，這些也稱為公司嗎?

公司(company)，根據一個國家的法律規定(台灣則是「公司法」)，以營利為目的，依照公司法組織、登記、成立的社團法人。

註:法人(juridical person)，一國中的人受到法律保障，我們在法律上稱自然人(外國人、國民)，在一定身分、年齡時具有政治參與

等權力，則稱其公民。而法人相對於自然人，它不是真實的「人」接受法律的約束，它是對一個「集合團體」需要遵守法律的約束，我們將這個「集合團體」稱為法人。例如:公司、同鄉會、公會、政黨、基金會等。

註:社團，人民根據法律保障，為特定目的，以共同意思組成團體及參與其團體的活動。而這個「團體」我們可以稱它為社團。

根據台灣公司法規定，公司分為無限公司、有限公司、兩合公司、股份有限公司。公司的資金可能是多個人一起出資開設的，只有一個人出資開設的我們稱其為一人公司，而多個人出資時，這些出資者我們稱他們為「股東」，所以一人公司也是一人股東公司。

◎無限公司(unlimited company)，二人以上股東的組織，對公司債務有無限清償的責任。公司欠了多少錢，股東都要全部還清。

◎有限公司(limited company，簡稱 Ltd.)，一人以上股東組織，僅對公司只有出資額為限的責任。即當初出資了多少，最多就那些全部賠完後剩下債務不需要再負責。

◎二合公司，指一人以上無限責任的股東所組織。在兩合公司中，有股東是無限責任、有些是有限責任的公司。

◎股份有限公司(Company Limited by Shares，簡稱 Company Limited、Co., Ltd.)，二人以上股東或政府、法人所組織，將資本分為股份，由股東認其股份負有限責任。

股份有限公司的「股份」，若是我們一群人自己認領的，則稱這樣的公司為「閉鎖型」，而將「股份」公開而招募股東，則是「公開發行的股份有限公司」。而在台灣若在「台灣證券交易所

(TWSE)」公開發行股份，我們則稱上市股票。若在「中華民國證券櫃檯買賣中心(TPEx)」公開發行，則稱上櫃股票。

註:證券(securities)，指有價證券，是一種財產權的憑證，例如:股票(持有公司的一部分)、債券(持有債務的一部分)。

註:股票，在過去時股東證券都是一張張的紙張，稱其為票，以作為持有的證明。作為公司的一份子，除了承擔公司的負債外，公司賺錢時同樣享有分紅、股價上升的淨利、及部分公司營運的表決權等等。

台灣證券交易中，1000 股(share)稱為一張，

例如:股價 600，意思是 1 股 600 元，則 1 張股票 600,000 元。

了解何為股票後，我們簡單介紹個買賣的例子。

我們在購買時，基本上有兩筆額外的費用，一是幫你處理買賣的手續費，另一是股票交易稅(證交稅，只在賣出時收取)。

例如:有一檔股票，以一張股價 30 元買入、35 元時賣出，則可以有多少收入呢?

買入時和賣出時，都會各有一次的手續費，公定價格是股價的 0.1425%，而股票交易稅依目前法規是賣出時股價的 0.3%。

當我們以 30 元股價買入一張某公司股票時，共需花費:

$$30000 \times (1 + 0.001425) \approx 30043\text{元。}$$

當以股價 35 元賣出時，則可以獲得:

$$35000 - 35000 \times 0.001425 - 35000 \times 0.003，$$

扣除手續費及交易稅，得到 34845。

則收入−成本$= 34845 - 30043 = 4802$，淨賺 4802 元。

我們以後在應用問題中見到這些稅類、股票的問題，這些都是離我們生活很近的問題呢，若我們去看股市的走向，有紅的、綠的，各種奇怪的線條與英文縮寫，雖然沒辦法馬上理解，它在商業模式下雖然複雜，若沒有興趣的同學只要知曉它們由來即可，若有興趣的同學可以將這些概念當作起始點自行深入研究。

b. 度量(measure)(濃度(溶液溶劑溶質)、微觀尺度)

當心情不好時，就會想要來一杯手搖飲料，或在炎炎夏日中，灌下一杯清涼的茶飲更是消暑。台灣的手搖飲料店更有無糖、微糖、半糖、少糖、全糖之分，我們怎麼衡量這些不同「甜度」的飲料呢?

我們將一杯 95 克重的水，加入 5 克重的糖。經過不停地攪拌均勻後，杯中的水變成了 100 克重的糖水。為了形容這樣的糖水的「甜度」，根據糖與水的比例，我們以濃度一詞度量其甜度。

溶液，兩種以上的物質均勻混合而成，可以為氣體、液體、固體。一般來說，我們則習慣表示液體，例如上面糖與水的結合稱糖水溶液。

而溶液中的物質，我們常把甲加入乙中，則稱甲為溶質、乙為溶劑，讀作:(溶質)(溶劑)(溶液)→糖水溶液。例如:將食鹽(鹽巴)加入水中攪拌均勻我們稱食鹽水溶液，將純酒精加入水中稱為酒精水溶液。

註:兩物質中誰是溶質、溶劑的判斷也有以多寡來區分的作法，較多的稱溶劑、較少的稱溶質。它們之間並沒有統一的判別，因此，在溶質溶劑的說明上，一定要清楚交代。

當(溶劑)水的量不變時，放入糖(溶質)的比例越高時，糖水的甜度越高，在溶液中溶質的比例我們則給它度量的名稱「濃度(concentration)」。

$$\text{濃度} = \frac{\text{溶質}}{\text{溶質} + \text{溶劑}} \times 100\%$$

$$(\text{或 濃度} = \frac{\text{溶質}}{\text{溶液}} \times 100\% \,)$$

我們一開始例子中，將一杯 95 克重的水，加入 5 克重的糖，則這杯糖水的濃度是 $\frac{5}{95+5} = \frac{5}{100} = 5\%$。則稱這是一杯濃度 5%的糖水溶液。

當我們掌握住濃度的基本概念後，在實用上面我們常碰到「稀釋」、「濃縮」、「加濃」、「混合」四類問題。

◎稀釋，溶質不變，增加溶質使溶液濃度降低。在糖水例子中，我們增加「水」攪拌均勻後，糖水溶液的濃度降低，變更不甜。

◎濃縮，溶質不變，減少溶質使溶液濃度增加。在糖水例子中，可以透過加熱將水蒸發，糖水溶液的濃度增加，變得更甜。

◎加濃，溶劑不變，增加溶質使溶液濃度增加。在糖水例子中，我們增加「糖」攪拌均勻後，糖水溶液的濃度增加，變得更甜。

◎混合，將兩不同濃度的同類溶液混合。在糖水例子中，我們將兩杯不同甜度的糖水混合的問題。

我們以「重量」來衡量溶質在溶液中的比例，我們這裡的濃度實際上稱為「重量百分濃度(weight percentage concentration,簡稱 wt%)」，若我們以「體積」來衡量時，則會有「體積百分濃度(volume percentage concentration)」。

我們將舉一些實際的例子去看看這些溶液的濃度變化:

◎稀釋(dilution)

例如:酒精根據研究，75%酒精比 95%酒精殺菌效果好。

若有一瓶 500 克重的 95%酒精，加入了 100 克的水後，它的濃度變成多少?

酒精，為酒精水溶液，由酒精和水結合的溶液。假設溶質是酒精、溶質是水的前提下，我們可以計算出 500 克重的 95%酒精中有:

酒精:$500 \times \frac{95}{100} = 5 \times 95 = 475$克

水: $500 \times \frac{5}{100} = 5 \times 5 = 25$克

接著，我們將 100 克的水倒入，則濃度:

$$\frac{475}{500+100}\left(\frac{\text{酒精}}{\text{原來 }500\text{ 克酒精溶液加上 }100\text{ 的水}}\right) = \frac{475}{600},$$

約 79.17%濃度的 600 克重酒精水溶液。

註:我們這裡使用濃度為重量百分濃度，若是 500 毫升的酒精與 100 克的水，單位不一致則需要換算單位，其中 1 毫升不一定等於 1 公克，一定要注意。

◎濃縮(condensed)

例如:若有一瓶 20 克重的 0.9%食鹽水，靜置在桌面上一陣子後蒸發了 2 公克，它的濃度變成多少?

食鹽水，是鹽與水的溶液(像是我們在廚房拿鹽巴與清水混合也可以稱食鹽水)，與生理食鹽水可能有些許不同，生理食鹽水有可能有參雜其他物質在裡頭，醫用的生理食鹽水的有經過殺菌等過程。生理食鹽水濃度常見是 0.85%~0.9%是，像打點滴、清洗隱形眼鏡、清洗傷口等都會使用到它。

若我們將食鹽水放置在空氣中，其中的水會不停地隨時間蒸發，直到最後剩下食鹽顆粒。或是我們將食鹽水以加熱方式，最後水也會蒸發而剩下鹽。

註:濃縮使溶劑減少的作法不只有蒸發的方式，像是透膜(利用水分子、食鹽分子的大小不同分開)、冷凍加壓等，有興趣的同學可以自行研究。

我們先解析 20 克重的 0.9%食鹽水的溶質(食鹽)、溶劑(水):

食鹽:$20 \times 0.9\% = 20 \times \frac{0.9}{100} = 20 \times \frac{9}{1000} = \frac{180}{1000}$克

水:$20 - \frac{180}{1000}$(也可以用溶液重直接減去溶質重，得到溶劑重)

接著水蒸發而減少了 2 克，溶液重為 18 克。濃度為:

$$\frac{\frac{180}{1000}}{18} = \frac{180}{1000} \times \frac{1}{18} = \frac{10}{1000} = 10\%$$

◎加濃(enrich)

我們在調味時，發現味道不夠，溶劑不變而增加調味料的動作，稱加濃。

例如:媽媽調配奶茶，將 90 克重的紅茶，放入共 18 克重的牛奶攪拌均勻後，試喝了一口覺得牛奶味道太淡了。若紅茶視作視作溶劑、牛奶視作溶質下，則奶茶濃度想達到 25%，需要再倒入多少克的牛奶。(請忽略試喝一口的奶茶的量)

若我們最後得到濃度 25%的奶茶，且紅茶(溶劑)固定是 90 克。

假設我們濃度 25%的奶茶共需要倒入□克重的牛奶，則

$$25\% = \frac{\square}{90+\square}。$$

則整理一下式子:$\frac{25}{100} = \frac{\square}{90+\square} \Rightarrow \frac{1}{4} = \frac{\square}{90+\square}$ 但是這個問題，我們目前解起來有點困難。等到 ch14 章節後，可以回來解決這個問題。

但是我們依然可以嘗試代値法(代數字試答案)，將□ = 1、2、3…代入，可以得到共需要 30 克的牛奶。原本就已經有了 18 克重的牛奶在奶茶中，只需要再倒入 12 克的牛奶即可條配出濃度 25%共 120 克重的奶茶。

◎混合(mixing)

例如:將一杯 50 克重濃度 8%的檸檬水與一杯 25 克重濃度 15%的檸檬水倒在一起，則這杯 75 克重的檸檬水濃度是多少?

檸檬水，由 100%檸檬原汁與白開水混合，假設檸檬原汁是溶質、白開水是溶劑，二杯混合後溶液共重 75 克是我們知道的，因此將兩杯檸檬汁的溶質找出來我們就可計算出濃度。

50 克重濃度 8%的檸檬水:$50\times\frac{8}{100}=4$克

25 克重濃度 15%的檸檬水:$25\times\frac{15}{100}=3.75$克

因此，混合後的檸檬汁濃度為:$\frac{4+3.75}{75}=\frac{7.75}{75}\approx 10.33\%$

我們還會聽到另一個濃度的使用名詞「百萬分(點)濃度(ppm)」，常用在表示濃度極低的溶液上面，代表每一百萬公克溶劑中含 1 公克物質時稱之 1 ppm，例如:農藥殘留抽檢需要在 0.01ppm 以下，指得是每 1000 克溶液中所含農藥要在 0.01 毫克以下。

註:它也有很多轉換後的定義:「每一百萬毫升溶劑中含 1 公克物質時稱之 1 ppm、一公升的溶液中含有一微升的物質」。

小試身手:

(1)若想將 1200 克重濃度 95%的酒精溶液調成濃度 75%的酒精溶液，共需再加入多少克重的水?

(2)魚塘(人工魚池)中養殖了許多的魚，待牠們長大後可以賣個好價錢。控制好水的品質、藻類的數量是讓魚群好好生長的重要條件。BKC 除藻劑是可以有效控制藻類過度生長的藥劑，但具有毒性，使用過多會造成魚群中毒死亡。它建議使用應在 2ppm 時 BKC 除藻劑效果最好，魚兒也可以代謝掉毒素。若魚糖中共有 2 噸重的淨水，則需要倒入多少克重的 BKC 除藻劑?

在 ppm 的世界中，我們漸漸可以看到「蒼海之一粟(大海中的一粒米)」那樣的世界，(我們以自己為海看待一粒米，或是自己是一粒米看待整個大海)，我們過往所學的長度、重量、時間實際上它們更寬廣。

度量尺度

◎長度

我們過去只用了公里、公尺、公分、公厘。比公分、公厘更小的單位:

-微米

1 微米等於 0.0001 公分(一萬分之一公分)(一百萬分之一公尺)，Micrometer，簡寫㎛。例如:人類頭髮的直徑約為 70 微米、醫用口罩(外科口罩)可以阻擋 5 微米顆粒以上的細菌及灰塵、光纖網路每一根只有 10 微米、血液中的紅血球直徑約 6 至 9 微米、白血球 7 到 20 微米、血小板直徑約 2 到 4 微米。

-奈米

1 奈米等於一千萬分之一公分(十億分之一公尺)，即 1 微米等於 1000 奈米，Nanometer，簡寫 nm。例如:我們常聽到的奈米塗層(光觸媒、二氧化矽塗料、奈米級產品)，因為奈米的特性，在物體表面上了一層奈米塗料後，像是上面有一層塑膠袋一樣，水不會滲透下去；冠狀病毒如 SARS 病毒大小約在 80 至 160nm；另外就是台灣產業的產業半導體，我們常聽到「半導體製程 3 奈米關鍵技術有進長」、「某公司預計 2030 可以量產 2 奈米的產品」，半導體我們現階段可以理解是「製作晶片」的工程，晶片中電子元件的通道的長度是 3 奈米，我們則稱它是 3 奈米的製程。

-皮米

1 皮米是一兆分之一公尺(1 奈米等於 1000 皮米)，picometer，簡寫 pm，也稱微微米。當我們現今科技已逐漸靠近奈米科技，皮米級是未來發展方向。

而距離公里以上，也有百萬米(Mm)、吉米(京米)(Gm)、兆米(垓米、太米)(Tm)等等，但是我們還是習慣以公里或是以未來 ch12 將會介紹的科學記號表示。

◎重量

過去我們學過毫克、克、公斤及噸。

和長度一樣，一千分之一倍數上去分別稱「微」、「奈」、「皮」。

1 毫克等於 1000 微克，微克(μg)(mcg)。

1 微克等於 1000 奈克，奈克(ng)。

1 奈克等於 1000 皮克，皮克(pg)。

重量級的部分，人們還是習慣以毫克、克、公斤及噸來使用較多。

◎時間

和長度一樣，一千分之一倍數上去分別稱「微」、「奈」、「皮」及「飛」。

我們在網路傳輸等資訊業會大量使用這些時間級單位。

-毫秒(ms)，1 秒等於 1000 毫秒，例如:我們在手機平板中寫字畫線，當手指移動至畫面上出現字的軌跡，約會有 1 至 100ms；網路測試速度時，以 Ping 的方式你向對方敲門至對方回應的時間，也以毫秒表示，Ping 值在 1 至 30ms，則表示網速通順，不太有延遲，若大於 100ms，則常會有畫面延遲、停

頓等現象；每次眨眼平均是 250 毫秒。

-微秒(μs)，1 毫秒等於 1000 微秒(1 微秒等於一百萬分之一秒)，例如:閃電的一閃約數十微秒；監視器會在 5 至數百微秒更新畫面(最近幾年較常使用螢幕更新率 hz 一詞)；另外，我們網路傳輸速度的延遲時間正在朝微秒級進步當中。

-奈秒(ns) ，1 微秒等於 1000 奈秒(1 奈秒等於十億分之一秒)，例如:舊世代 CPU(中央處理器，手機、電腦、平板等電腦科技產品中執行運算的中心) 中，平均執行一個指令所需的時間為 10~100 ns，現在的 CPU 更已達 0.5ns、0.1ns 的速度，或以 MIPS(每秒百萬指令集)來衡量 CPU 的表現；使用雷射、脈衝等醫療行為，以 10 到 100 奈秒在皮膚上除斑、將黑色素打散等等；LED(發光二極體(想像類似燈泡的東西)，可發展螢幕、燈具)它的開關速度達奈秒級。

-皮秒(ps)，1 奈秒等於 1000 皮秒。許多雷射手術都突破奈秒的限制，達到皮秒級。

-飛秒(fs)，1 皮秒等於 1000 飛秒(1 飛秒是一千萬億分之一秒)。近視雷射手術是飛秒級的技術；光在真空中 1 飛秒只能移動約 0.3 微米的距離；在量子世界、量子電腦都常以皮秒與飛秒來進行討論。

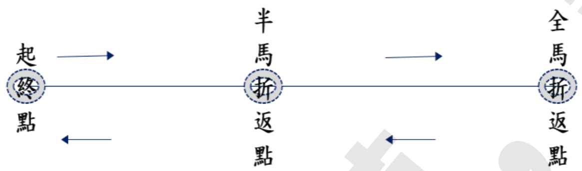
註:電腦中 fps(每秒顯示影格數(frame per second))與皮秒、飛秒意思不同，不要搞混了。

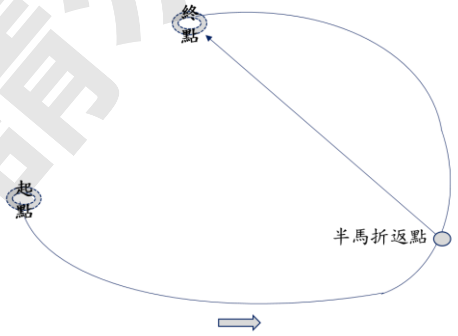
這些稱為數量級，在國際單位制 SI 制定出 7 個基本物理量，分別是長度、質量、時間、電流、溫度、光度，物質量。這些量級的制定通過千百年來人類智慧結晶，一公斤之所以稱為一公斤，背後的道理是更深入的。

c. 生活(折返、吋、運動率、閏年)

◎折返(return)

每個人都來自家庭，每個家庭都有不同的生活模式，爸爸、媽媽及家人都會有喜好的運動偏好。「折返」、「往返」一詞，對有登山、馬拉松、鐵人三項經驗的同學有機會比較熟悉的，在長距離的移動路線中，以馬拉松為例，分成全馬(全程馬拉松的簡稱)、半馬、及親子/長青/休閒組(或是直接以長度 5K 組(5 公里)、10K 組)，全馬規定長度是 42.195 公里、半馬則是 21.0975 公里。它的起點與終點未必是同一位置，不是全馬的選手會在「折返點」處移動到終點處。





小試身手:

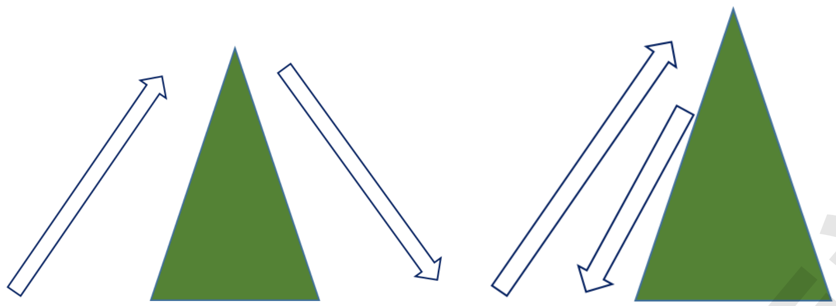
(1)全馬距離相當於(　　　　　　)公尺、半馬距離相當於(　　　　　　)公尺。

(2)全馬距離相當於是跑了(　　　　　)圈 400 公尺的操場。

(請無條件捨去至整數位)

在登山時，也分成上山與下山的兩個部分，當見到應用問題時，一定要仔細確定它的意思。進入登山口後，現實中下山是有許多條道路，也都會抵達不同的地方， 而有一部分的登山步道是向

山中走一圈，最後回到登山口的。如下圖所示，我們在遇到登山類似折返問題時，一定要考慮這樣的情況。以及強調「往返」和「原路往返」等的詞彙，都是影響整體意思的關鍵所在。



◎吋

吋(inch)，一字原來是丈量單位「尺、寸、分」的延伸。我們或許曾經聽過不少關於這些單位的諺語或成語，例如:「寶寶睡，一眠大一寸」、「三寸不爛之舌」、「堂堂七尺男孩」、「入木三分」等等。在過去丈量長度，是以政府公告為準，依循「一尺十寸，一寸十分」的原則，而所謂的「尺」就是如同今天的直尺，而它的一個尺的長度隨著朝代、地方都有不同規定。例如:漢朝一尺約是今天的 24 公分、唐朝還區分大尺 29.4 公分及小尺 24.6 公分。

而今天沿用下去的如台灣與香港，1 台尺=30.3 公分、

香港 1 寸=3.71475 公分。

而「呎」字原使用於西方國家(尤指英國，故又稱英吋)，一呎 12 吋，今天的 1 英吋等於 2.54 公分，一英呎等於 30.48 公分。且以「”」表示吋、而「’」表示呎，我們常看到有些標示「28”」的產品，它的意思是 28 吋。

公制單位中，我們有公分、分尺，有沒有公寸呢? 是有的，1 公寸為 10 公分。但是我們比較少使用它。若我們說 1 寸，到底是台寸、公寸、英吋，單位上混亂會造成很多紛擾。

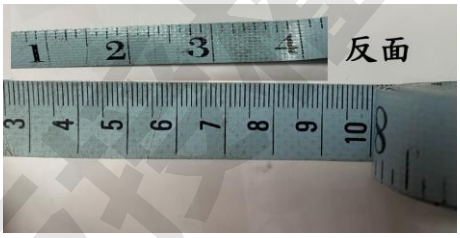
而且在今天「呎」、「尺」和「吋」、「寸」大家都已經通用，因此我們要注意這些丈量單位使用。

小試身手:

(3)(　　)西式的生日蛋糕，我們常直徑以 7 吋、12 吋表示。這個「吋」是指? (1)英吋 (2)公寸 (3)台吋。

(4)(　　)電視螢幕、顯示器等電器，習慣以兩頂點對角線的長度作爲其大小的表示，如:32 吋電視、55 吋 4K 顯示器。這個「吋」是指? (1)英吋 (2)公寸 (3)台吋。

(5)(　　)如圖，丈量身體尺寸地皮尺與丈量物體大小的捲尺，皮尺一面是以公分爲準、捲尺則是下排爲公分制，則皮尺另一面與捲尺上排的單位是指? (1)英吋 (2)公寸 (3)台吋。



(皮尺)

(捲尺)

(6)在裝潢、木工、石鐵材、大圖輸出(例如:影印大型海報)等行業，很常使用一種單位稱爲「才」。而一才等於一台尺×一台尺。根據換算，一平方公尺約等於(　　　)才。(四捨五入至小數點後二位)

(7)(　　)弟弟身高 165 公分，穿越到漢朝後使用漢尺，能否算上一個「堂堂七尺男孩」?(請填是或否)

◎運動數據•率

要有強健的身體，需要養成運動的習慣。良好的運動習慣除了對身體的延壽有幫助外，對於課業的也是有幫助的，透過運動可以使身體放鬆。運動對我們力與美的培養，也是有幫助的。透過伸展肢體、極短時間的動作轉換、精準且細緻的操作、比賽場上的精神都令人振奮，令人不由自主地稱讚一聲「太酷了」、「太感動了」。同時運動也對自己身心狀況調整，有很大的幫助，我們自己和自己在比賽，不斷地調整呼吸、修正自己的動作，告訴自己「我做得到的」。

在西方國家中，音樂、運動、畫圖等都是課業、上班之餘，是生活重要的一部分。喜愛籃球的朋友，平時也會觀看籃球的聯賽、閱讀籃球雜誌、參加各式籃球社團，他們在籃球世界找到自我的價值。鼓勵各位讀者可以找到自己喜愛的休閒活動，練習盡管辛苦，可以在當中讓生命更有意義的活動有何不為呢。

球類運動中，贏得比賽的關鍵除了進攻次數與進攻時間之外，進攻的命中率是場上重要數據之一。以籃球來說，罰球命中率、三分球命中率；棒球的球員打擊率、投手的守備率等等，透過這些數據調整選手的身心狀態、訓練模式都是重要的參考。

命中「率」、打擊「率」(Batting average)，指得是$\frac{\text{成功次數}}{\text{總次數}}$的比率，

例如:10 球罰球中，成功命中了 3 球，則罰球命中率 30%。

而棒球的打擊率則是總共打擊數中打出安打的比率(安打(hit)，將球成功揮棒打擊出去，並且球落在界內且沒有被接殺(接殺，指球未落地前直接遭防守球員接住，該打擊球員直接出局)，同時打擊者站上壘包稱之安打。)，打擊率$=\frac{\text{安打數}}{\text{總打數}}$。

透過打擊率我們可以觀察這個球員的進攻強度，讓投手調整投出球的難度。

對投手而言，防禦率、自責分率是重要的數據，以守備率來說，將場內發生刺殺、助殺、失誤等次數以(刺殺 + 助殺) ÷ (刺殺 + 助殺 + 失誤)計算，我們可以知道當失誤越多時，守備率越低。

註:自責分率(又稱防禦率)(ERA)，指投手平均每場球所失的自責分(自責分，簡單來說指投手因為被擊出安打或四壞球保送造成對方得到的分數，皆算自得分)，即「自責分×9÷所投局數」。

或許我們喜歡籃球不喜歡棒球，或是只喜歡足球的人，但是我們看到這些數據公式後，可以了解規則後很快的學會這些數字的意義，因為這些「率」有著數學本質上的特性，像是投手防禦率是會小於 1 的，籃球命中率不可能超過 100%的。

◎閏年(leap year)

一年有 365 天，它是依據地球繞太陽一周所花的時間，但根據觀測與測量技術的精進，實際上地球繞太陽一周需要 365.24219 天，則每過一年我們就會有 0.24219 天的誤差。

因此，在西元曆法上是這樣安排閏年的:

西元年	4 個倍數	100 的倍數	400 的倍數	判定	例子
	o	o	o	閏年	西元 2000 年
	o	X	X	閏年	西元 2004 年
	o	o	X	平年	西元 1900 年
	X	X	X	平年	西元 2025 年

而西元曆法上的閏年，指得是在該年中增加 2/29 日一天，也被人稱作閏日。而平年是指該年並沒有增加 2/29 一日。

同時，地球自轉一周即一天也並非剛好 24 小時，而是 23 時 56 分零 4 秒，我們也同時透過閏秒同時修補誤差。

在台灣還有另一個曆法─農曆(又稱農民曆、黃曆、夏曆、舊曆、通書)，是古老先民以太陽光將一年分成二十四節慶，農民依其可以執行農活。

註:古老曆法中，若以地球繞太陽公轉作為依據，則可以稱其為陽曆；若以月亮的陰晴圓缺、與月球繞地球公轉作為依據，則稱其陰曆；有些人有誤會農曆是陰曆，農曆實質是陰陽曆(兩者皆有作為參考)。

農曆發展後來，也注意到了閏年的問題。於是，農曆也做出了調整，也有所謂的閏年的出現，但在農曆中，「閏年」是「閏月」的概念。農曆以某個月份整個重複直接再過一次，於是就有所謂的「閏六月」，連續過兩個六月的意思(前六月、後六月)。

農曆閏年的規律是 3 年一閏、5 年二閏、19 年七閏的原則，潤月的安排則依據古人節慶、天體運行的原因而有所不定。中國大陸訂定「農曆的編算和頒行」，而台灣是由中央氣象局頒布「天文日曆」、「曆法全書」為準。(註:不同國家的農民曆可能會不同，造成節慶日也會有所誤差)。

註:當有新聞寫著，今年是閏年、閏月又閏秒，我們要清楚知道，閏年是指西元曆(增加 2/29 日)、閏月指得是農曆中某個月份連續過了兩次，而閏秒是時間上因為地球自轉的誤差調整時間。

註:中央氣象局的曆法全書對於農曆閏月的解釋如下: 農曆置閏是為了使四季與實際氣候配合，每 19 年需加 7 個閏月，在農曆月裡通常包含 1 個節氣和 1 個中氣，如果僅出現節氣而無中氣時，曆法上就規定這個月為閏月，作為前月的附屬月，例如民國 109 年（西元 2020 年）國曆 5 月 23 日至 6 月 20 日的這個朔望月只有「芒種」節氣，而沒有中氣，因此定為閏月，又因前月是四月，故該月定為閏四月。而朔望月中有中氣而無節氣時，是不予置閏的。

農民曆除了閏月，特別的是採用了「天干地支」，以六十年為一周期為單位。

十天干:甲、乙、丙、丁、戊、己、庚、辛、壬、癸。

十二地支:子、丑、寅、卯、辰、巳、午、未、申、酉、戌、亥。

以年、月、日、時都可以對應，其中「年」的部分稱六十甲子紀年法，例如:2020 年為庚子年、2021 為辛丑年、2022 為壬寅年，每一年天干與地支都會往下移動，共有 60 種組合。

小試身手:

(8)依六十甲子紀年法，2030 是(　　　　)年。

(9)西元 2027 至西元 2030 年中，是平年的有(　　　　　　)、閏年的有(　　　　)；西元 2100 年(　　　)閏年(請填是/不是)。

d. 生物(動物的足與角、熱量、地質年代)

◎動物的足與角

台灣隨著都市化的腳步、家庭經濟壓力持續增加等因素，大家與大自然能相處的時間逐年在下降。訪問過許多學生、老師表示，竟然很多學生連動物有幾隻腳、頭上有幾隻角、是四肢爬行還是雙腳行走都不適很清楚。編者建議各位讀者可以多踏青，動物園、植物園、大自然才是生命的教室。我們就透過一些題目，檢驗大家對日常生活中動物的知識吧。

小試身手:

是非題:

(1)( )牛，四足動物，有蹄而沒有腳趾頭，除了基因突變與安格斯牛外，不論公牛或母牛，一般頭上有一對「角」的。

(2)( )雞，兩足動物，每隻爪子通常有三個趾，頭上有像是火焰形狀的肉冠，公雞有而母雞沒有。

(3)( )鴨，兩足動物，鴨子的視野是 360 度，不用轉頭便可以看見身後，鴨子腳上有如扇子般的蹼，嘴巴較長較扁平，常以嘴啄自己尾端的脂肪腺塗抹羽毛上，讓羽毛可以不容易濕。

(4)( )鵝，外觀像鴨一樣，兩足、有蹼、尾端也分泌脂肪腺，但嘴巴較短呈現立體狀，脖子長度和身體差不多等長。在興奮或生氣時頸部及羽毛會抖動，鵝群中也會產生首領鵝。

(5)( )羊，四足動物，通常公羊有角、母羊則依品種不定，常見分成山羊與綿羊兩類，一般山羊有鬍子、綿羊沒有鬍子。羊和牛一樣都會將吃進肚中的青草反芻，將胃中草糜送回口腔咀嚼後再次吞入消化。

(6)( )兔，四足動物，前腳有五根腳趾、後腳有四根腳趾，後腳比前腳長，因此常以跳躍方式移動。雖然有夜視能力、但是兔子有色盲、正前方與下方是兔子的視線死角。兔子長時間吃紅蘿蔔造成兔子眼睛呈現紅色。

(7)( )豬，四足動物，一足有二趾呈蹄狀。因爲前額多肉、頸椎的限制，豬直線觀看時，看不見天空，除非躺下或是後腳蹲極低的情況。牠在地上翻滾是爲了在皮膚上一層土抵擋紫外線以及防蚊蟲叮咬。

(8)( )青蛙，小時候是生活水中的蝌蚪，使用鰓呼吸；長成青蛙後以肺呼吸，牠先閉上嘴部由鼻孔吸入空氣，再將空氣打入肺中，所以牠才一股一股的，並長出四條腿，一般前腳有四趾、後腳則有五趾。又稱蟾蜍、蛤蟆、田雞。

(9)( )螞蟻，昆蟲的一種，有六隻腳，以顎(嘴咬)或是腹部末端的短針分泌蟻酸攻擊敵人，螞蟻腹部末端及腿上會分泌蹤跡費洛蒙，離家後可以沿著原來道路回家而不會迷路，也可以彼此之間交換訊息後標記位置。

(10)(　　)螃蟹，十足動物，八隻步行的腳及一對螯。牠以鰓呼吸，將水吸入身體中後將水中氧氣溶入鰓的血管中，剩餘的水和雜質則從嘴的兩側吐出，便是我們看到的吐泡泡。一般螃蟹死亡超過一小時後，體內的組氨酸會開始釋放毒性，若食用可能會引發中毒。

(11)(　　)犀牛是牛的一種，而河馬是馬的一種。

(12)具有六隻腳、具有頭、胸、腹部三部分，我們常將其稱爲「昆蟲」。下列何者並非爲昆蟲?(　　　　　　)請填代號。

(甲)蜘蛛 (乙)蟑螂 (丙)蜻蜓 (丁)蝴蝶 (戊)蜥蜴 (己)蝦子

(庚)蜜蜂 (辛)蒼蠅

◎熱量

手和腳能動、呼吸、心跳、大腦思考都是需要能量，而大部分的能量都是都是經過飲食攝取，將各種食物消化、轉化成三大營養素(醣類(carbohydrate)、脂肪(fat)、蛋白質(protein))，在需要時轉化成能量或熱量，提供身體使用。

熱量使用(caloric)的單位，我們習慣以「大卡」來計量，或以「千卡」(kcal)稱呼。

註:比較小一點的單位「卡」(cal)，是「卡路里」的簡稱。原來是指 1 公克的水在 1 大氣壓下上升 1°C所需要的熱量。1000 卡即是 1 千卡，或稱 1 大卡。

1 公克的醣類與蛋白質可以提供人體約 4 大卡的熱量，而 1 公克的脂肪可以提供約為 9 大卡的熱量、酒精則為 7 大卡，而維生素、礦物質與水則不會提供熱量。

攝取食物消化後，一部分會轉為能量或熱量後直接使用，剩下的則會以肝醣、脂肪存放在肌肉、皮下組織(皮膚下)、內臟周圍組織等，若我們攝取過多能量則會造成臉圓手粗水粗、脂肪肝、鮪魚肚等現象。

根據台灣衛福部建議:

每天活動量	體重過輕者所需熱量	體重正常者所需熱量	體重過重、肥胖者所需熱量
輕度工作 辦公室上班族、學生	35 大卡×目前體重（公斤）	30 大卡×目前體重（公斤）	20~25 大卡×目前體重（公斤）
中度工作 服務生、護理師	40 大卡×目前體重（公斤）	35 大卡×目前體重（公斤）	30 大卡×目前體重（公斤）
重度工作 (運動員、農作、搬運業)	45 大卡×目前體重（公斤）	40 大卡×目前體重（公斤）	35 大卡×目前體重（公斤）

(修改衛福部公告之表格)

例如:一位體重正常重 50 公斤的學生，他一天共需要$30 \times 50 = 1500$大卡的熱量。

但若我們有時攝取過多的熱量，想透過運動消耗攝取過多的熱量，例如:今日攝取了 3000 大卡的熱量，超過建議一天 2400 大卡的熱量，如何計算呢?

每公斤消耗熱量(大卡) ×體重(公斤)時間×(小時)=消耗總熱量(大卡)

運動項目	每公斤消耗熱量
慢走	3.5
快走	5.5
慢跑	8.2
騎腳踏車(一般速度，10 公里/時)	4
籃球(半場)	6.3
羽球	5.1
有氧舞蹈	6.8

例如:有一人重 60 公斤，慢跑 2 個小時。

則他消耗的熱量是$8.2 \times 60 \times 2 = 984$ 大卡。

小試身手:

(13)有一學生，體重是 60 公斤，屬於正常體重。根據衛福部建議他一天需要(　　　　　)大卡的熱量。若他在一天中攝取了 2790 大卡的熱量，則他需要快走運動(　　　)小時才能將熱量消耗至建議值。

(14)一袋泡麵的外包裝營養標示如下圖，一袋裡頭共有 5 包(5 份)泡麵，每包(份)共 85 克，若一餐吃了兩包泡麵，共產生熱量(　　　　　)大卡。

◎地質年代

地質年代，用以描述我們身處的地球它的歷史，以發生重要事件切成一段段的時期。共「宙(eon)(或稱元)、代(era)、紀(period)、世(epoch)、期(age)、時(chron)」六個時間單位，越前面的單位表述的時間越長，其中「代、紀」是我們比較常聽到的。

-宙，是以宇宙、地球所在的銀河系，依據目前科學家的推測中，地球在距今 46 億年到 50 億年前形成，而「宙」這個單位就是將這 4、50 億年進行切割，以生命現象出現(冥古宙)、初始生物出現(太古宙)、現在生物出現(顯生宙)(顯生元)分成三部分。

註:早期將冥古宙、太古宙合稱隱生宙(隱生元)，即寒武紀前的地質年代，占了全部地質時間的 85%，約有 40 億年的時間。

-代，在顯生宙中將古代生物時期、中等生物時期、現代生物時期依序以古生代、中生代、新生代稱呼。

-紀，在過去中以第一紀(爬行動物出現以前時期)、第二紀(爬蟲類動物時期)、第三紀(哺乳類動物時期)及第四紀(人類時期)作為紀的區分，後來經過更詳細地劃分，取消了第一、第二紀，將古生代劃分成寒武紀、奧陶紀、志留紀、泥盆紀、石炭紀、二疊紀等六個紀；將中生代劃分為三疊紀、侏羅紀、白堊紀三個紀；新生代則涵蓋第三紀(近再分為古近紀與新近紀)與第四紀。

顯生宙	新生代	第四紀	160萬年前至今	人類時代
		第三紀	160萬至6500萬年前	哺乳類快速發展
	中生代	白堊紀	6500萬至1.45億年前	恐龍時代(暴龍、三角龍)、開花植物興盛
		侏羅紀	1.45至2.01億年前	恐龍時代(蛇頸龍、劍龍)、裸子植物興盛
		三疊紀	2.01至2.51億年前	原始恐龍出現、最早哺乳類出現
	古生代	二疊紀	2.51至2.99億年前	地殼強烈運動、原始爬蟲動物出現
		石炭紀	2.99至3.59億年前	兩棲類出現、大量植物遭埋炭化成煤層
		泥盆紀	3.59至4.19億年前	魚類時代、兩生類登陸
		志留紀	4.19至4.4億年前	晚期出現原始魚類
		奧陶紀	4.4至4.8億年前	珊瑚
		寒武紀	4.8至5.4億年前	三葉蟲
元古宙		前寒武紀	46(50)億至5.4億年前	地球大氣層開始有氧氣
太古宙				細菌、藍綠藻出現

隨著科技進步、考古的新發現，地質年代會不斷地變動。了解地球上出現過的生物、植物，這片土地發生過什麼樣的事情，地球上有那樣的一群人埋頭窮盡一生之力專研與發掘這些過去，雖然身處經濟壓力比較大的國家或是家庭中的我們，探究這樣的問題會有餓肚子的問題要解決，我們能做的是給他們一個大大的 respect。

e. 資訊(檔案大小)、地理(海拔、方位法)、其他(易混淆字)

◎檔案大小(file size)

使用 3C 產品中，儲存照片、各式檔案都要有一個放置它的地方，我們稱之儲存空間，實際上就是硬碟。儲存空間有一定大小可以放檔案，這個小節中將會介紹檔案小大的單位。

電腦科學中資訊的最小單位 Bit (位元)，8 個 bits 等於 1 個 byte(位元組)。原以 1024 bytes 等於 1 KB ，以每 1024 前進一個單位(二進位表示法)，但國際單位(SI 制)是十進位表示法，如下:

(SI 制)是十進位表示法:	(資訊界)我們在縮寫、讀法上做出區分:
1000 bytes = 1 KB	1024 bytes = 1 KiB
1000 KB (KiloByte) = 1MB	1024 KiB (Kibibyte) = 1MiB
1000 MB (MegaByte) = 1GB	1024 MiB (Mebibyte) = 1GiB
1000 GB (Gigabyte) = 1TB	1024 GiB (Gibibyte) = 1TiB
1000 TB (TeraByte) = 1PB (PetaByte)	1024 TiB (Tebibyte) = 1PiB (Pebibyte)

雖然今天，很多情況大家都混用在一起了，今天說的 1GB，倒底是指 1024MB 還是 1000MB，都是有人在使用的。除了資料大小的表示外，資料流的表示(例如:網速、檔案傳輸)以 Kbps、Mbps、Gbps 等最為常見，以 Mbps 來說，它是指「每秒鐘可以傳輸多少百萬位元（Million bits per second）」，注意的是它並不是一秒多少 MB 的意思!

例如:1Mbps = 0.125 MB/s。因為 1Mbps = 每秒 1000000 bits = 每秒$\frac{1000000}{8}$ bytes，每秒 125000 bytes，它又等於每秒 125 KB = 每秒 0.125 MB。

而市面上我們所說的 300M 網路(300Mbps)，它等於 37.5 MB/s，每秒可以傳輸 37.5MB。

小試身手:

(1)在 32GB 空間大小的手機硬碟儲存容量中，若儲存一張照片需要容量 2.4MB 計算，約可以儲存(　　　　　)張照片。(請四捨五入至整數位，請以 1 GB =1024 MB 計算)

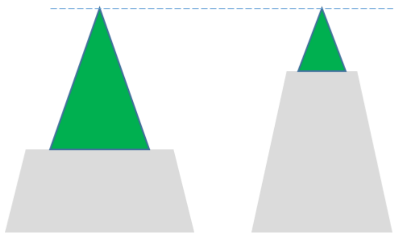
註:現正在推行手機行動網路 5G 的下載速率，平均約在 400 至 550 Mbps。

◎地理(海拔(elevation)與方位定位法)

我們常聽到形容一個「高度」，是以海的平面往上或是往下多少公里、公尺。那麼，「海平面(sea level)」(海的平面)就是我們的基準點，我們以「海拔高度」來形容海平面以上的距離；以「海拔深度」形容海平面以下的距離。

這個「海平面」的測量，因為地形、水域等因素測量是非常不一定的(可以想像世界各地水不停流動、地殼不停的動、地球自轉等)，海平面其實應該稱呼其為「平均海平面」。而且不同海域的海平面高度是不一樣的，台灣設置了「台灣水準原點」作為台灣各地區海拔高度的基準點(位在基隆海科館對面)。

因此，我們要有一個重要的概念，他國的海拔高度與我國的海拔高度縱使一樣，也可能因為海平面測定不同，實際上的高度是不一樣的。



如右圖，兩座山海拔高度一致，但其實開始從山腳爬至山頂的高度是不一樣的

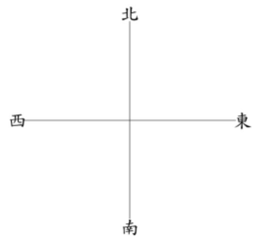
(又稱其為山的相對高度不同)

註:既然海平面是平均的，事實上海拔也應該稱其為平均海拔。

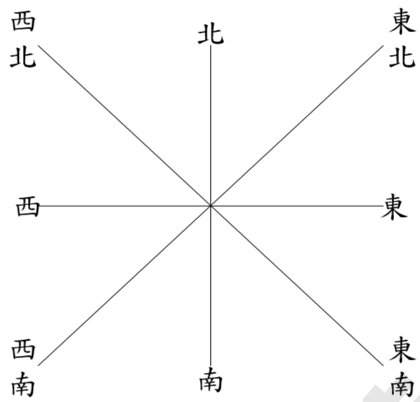
玉山(Oksam)，我們知道它高度是 3952 公尺，就是指海拔 3952 公尺。台灣海峽(Taiwan Strait)，平均海拔深度約 60 公尺。

我們在過去學過比例尺後，不知道大家有沒有發現一個問題，就是知道它在那邊，知道距離了，但是不知道怎樣表達是哪個「方位」。有人提出可以以「時鐘」的方式是闡述(表達)「方位」，例如:「三點鐘方向」即正東方、「十二點鐘方向」則是指正前方。但是這個方法，有一個問題若兩人在溝通位置時，「究竟兩邊的人時鐘如何是朝同個方向?」，我們習慣會以自己視野前方為 12 點鐘方向，如何使兩個人的時鐘是同個方向是重要的問題。

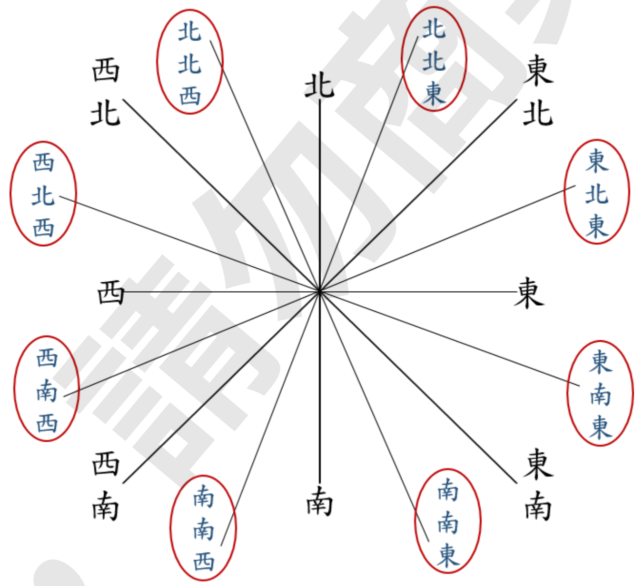
比較正式的方位說法，是以下介紹的八方位法與十六方位法。過去所學的以自己為中心，分東、西、南、北四個方位，稱四分位法。



(四分位法)



(八分位法)



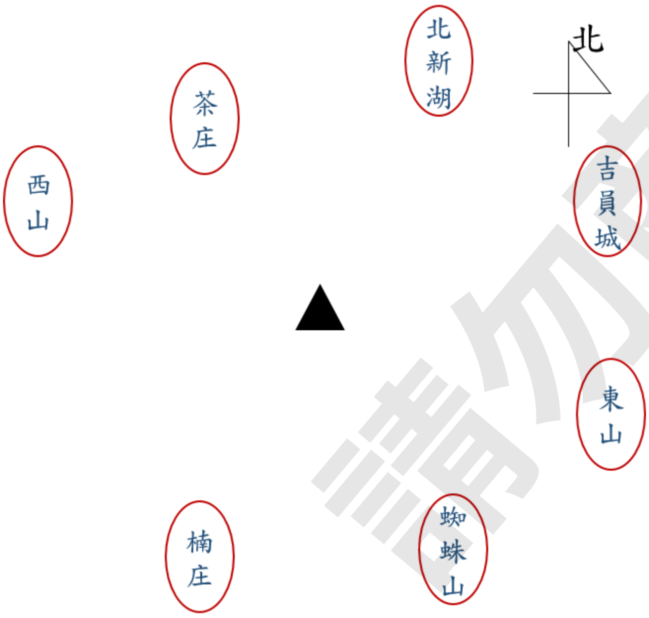
(十六分位法)

在上圖所示，八分位顧名思義，將方位分成八個方向，以一個圓由北開始順時針來繞一圈，正北方是 0 度，則東方是 90 度、東北方是 45 度、東南方則是 135 度。例如:以山脈來說，它可以說是東北-西南走向；以房子來說可以說座東南朝(門開處)西北；或是兩個人位置「你在我的東北方，則他的西南方是我」等等。

十六分位法又分得更準確，角度更是精準到東北方與東北東方只有 22.5 度之差。

小試身手:

(2)如下圖，三角形代表抓鬼人大郎位置，傳訊鴿不停要他往「南南東」前進抓鬼，若以十六分位法，若大郎往南南東直線前進最後會抵達(　　　　　)。若大郎接著想要前往吉員城，他要以(　　　　　　)方向前進。



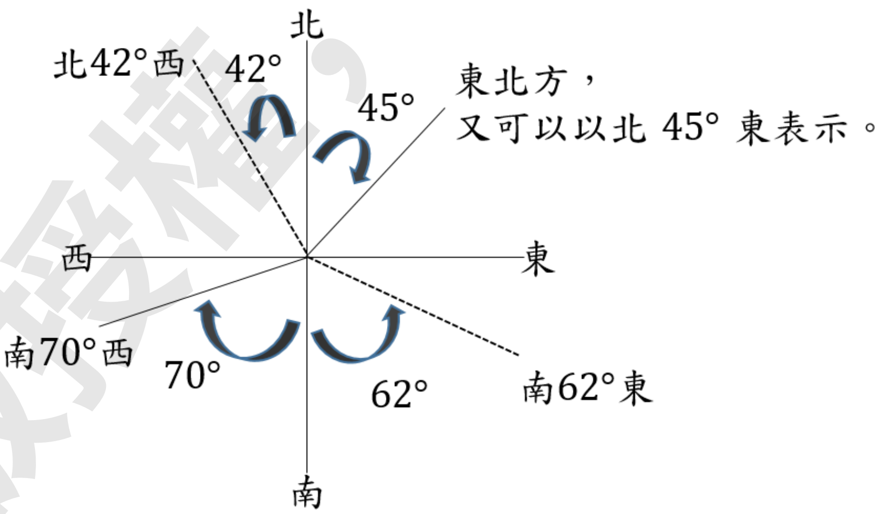
註:四、八及十六方向，也稱羅盤方位表示法。若我們以角度來表示，例如:東北方是 45 度、225 度是西南方，稱其爲方位角表示法。

補充:若十六方位也表達不清楚的方位怎麼處理呢? 我們會以「象限角表示法」來表示，象限角表示法將四方位法與方位角表示法結合在一起，以(方向 1)(角度)(方向 2)的形式來表示，「方向」則是表示那個位置是在哪兩個方向之間，例如:東北方是在東方與北方之間。

方向 1: 想要表示的位置在原點的南方或是北方，方向 1:會寫上南或是北。

角度： 以正南或正北作為0°(視方向 1 決定)，往兩側方向測量測想要位置的角度，僅表示不超過90°的角度。

方向 2: 再寫出該位置是在原點的東方或是西方，例如:北45°西，指西北方。



◎易混淆的中文字詞

在這個章節的結束前，要提及一個我們平時說的話語「中文」，在中文的文法中允許多個字彙連用在一起，雖然說起話來令人聽起來比較婉轉，但在解釋中有時讀起來會造成困惑。以下舉例一些例子:

1.「可能不是、可能沒有、可能不會」，將「可能」與否定的「沒有、不是、不會」連用在一起時，可能一詞當中包含了肯定與否定的發生，因此一般情況可以視為只解讀「可能」。

例如:爸爸可能沒有買牛奶，即是「爸爸可能買牛奶」(爸爸有買牛奶的可能)之意。但在現實對話中，則會有「沒有買」的機率比較高的暗示。但在數學中，每種情況都是需要考量的，有可能就是需要加進考慮範圍之中。

2.「至少存在、至多存在」，「至少」的意思是最少最少都要有一個，那麼連用了「存在」一字，存在的話至少也是有一個才叫存在，兩者算是表示最小限度的同義字。

例如:數字 1 到 10 中，至少存在 1 個 4 的倍數，意思可以等同「4 的倍數至少有一個」、「存在 4 的倍數」。

而「至多存在」，至多表示最多最多的可能，與存在一詞連用則會涵蓋在「至多」中。

3.「不大於、不小於、不少於」，大於是比較的詞彙，將甲和乙兩者進行相同單位的比較。

若甲比乙多，則我們說甲大於乙，數學以甲>乙表示。

若甲可能大於或是和乙相等，則會說「甲大於等於乙」，數

學以甲≥乙表示，同時「≥」又被稱「不小於」，是小於的相反的概念。

例如:數字 1 到 10 中，不小於 5 的質數有 5 和 7。

另一方面，「≤」小於等於，又被稱「不大於」。

例如:不大於 10 的合數，共有 4、6、8、9、10。*註:1 不是合數，不要忘記囉。*

在中文我們對話的「大於」、「小於」中，常以「大」省略「大於」而省略 「大於等於」，其實是很不精確的表示法，因此在省略字詞時一定要注意。

4.「沒有任何」，「沒有」是否定詞，任何是有指全部的意涵在裡頭。因此，兩個詞是組合起來一起表示意思的，有「全部沒有」、「完全沒有」的意思。

例如:數字 23 至 29 之間至沒有任何質數，即是 23 到 29 之間的數全部都不是質數、裡面完全沒有質數。

5. 逗號的使用，逗號使用於一句未完的話語，有停頓、接著說的意義。

例如:「爸爸十年前是 50 歲，他年紀是的隔壁叔叔的 1.05 倍。」我們知道第二句話是接在第一句話之後，那麼第二句話的時間點應該是「現在」還是「十年前」呢?

如果第二句話改成「他現在年紀是的隔壁叔叔的 1.05 倍」，就會明確地說明是指現在。

如果第二句話改成「他那時年紀是的隔壁叔叔的 1.05 倍」，就會明確地說明是指十年前。

因此，逗號雖然連結的上句，是不可以直接沿用上句的時間的，會有語意上的問題。在其下句中，也要清楚的表述究竟的時間點為何。

其實有時不只是題目上的問題，我們在表達時同樣也會有這些問題，或許是思考不夠周全、或是用字省略不當、或是想婉轉的表達等等，會令人看到/聽到時會產生誤解原來的意思。我們就勤勞一點，多寫幾個字講清楚吧。

第 10 章 學習的心態與診斷

在這個小節中，談的是心境的上問題。學習道路上難免都是有困難，也並不是付出後就會得到你想要的回饋，或許現在的你、周邊，已經超過一半的人漸漸在這條道路上放慢了腳步、停了下腳步，或是跌跤在地上至今都還沒爬起來。

那些你的朋友、同學們或是現在的你。遭遇困難、挫折會讓人想放棄，但也讓你重新思考自己在做些什麼。學習的道路上跟「心」有關的是，大部分是發生失去興趣、無法專心兩件事，剩下都是「方法」的問題。

希望在未來有遇到困難時，這個小節可以幫助到你。

a. 學習倦怠期

倦怠(burnout)，指疲倦而怠惰的意思，白話就是說因為疲倦產生學習的排斥、放棄的心理。那為什麼會疲倦呢? 有可能是

(一)過度的學習 (二)持續低回饋的效應，兩大心理壓力造成。

首先，我們要知道「疲倦」並不是不好的現象，那些「彷彿對世界熱情、失去思考能力、什麼都不想做只想放空」等現象，你不是生病而是身體提醒你該排除壓力(pressure)了。

(一)過度的學習，指高強度的學習、連續的長時間學習等。

短時間內學習量超乎該階段可接受範圍，知識需要消化(整理、驗證、再現、內化)的，在沒有充分消化時又再迎來下一次的高強度學習，會造成極大的壓力，你會覺得你跟不上進度，久而久之你會對這樣狀態呈現放棄的心理。

連續長時間的學習，指學習以密集、連續的狀態進行學習，通常是中低強度的學習才會做這樣的安排，例如:複習、每天都上兩堂數學課等。

(二)低回饋效應，回饋(feedback)是指我們投入後所得到的回報，當我們投入心力，而希望自己可以達到某個目標而失敗時(或是說一直達不到目標的意思)，這樣的原因有很多種，有可能是自己目標太高、或是對自己的自信過高、或是相反地這些事情太過簡單(或自己目標過低)而得到的回饋非常低，做那些事情就像你以前做過般你無法更進步。

這兩種類型都會依照你對這些事情的抗壓性，分成短期壓力與長期壓力，且短期壓力是可能變成長期壓力。壓力的來源可能來自老師、家長、同儕(同學朋友)、社會(親戚、鄰居、社會價值)及自己(自己對自己的要求)。

因此，我們將這一長串簡單來說:「壓力→疲倦→倦怠期」。

為了避免過度壓力變成學習疲倦，面對壓力我們可以「增加抗壓性」、「抒發壓力」兩個途徑處理。

舉數學來說，若你對數學是喜歡的(喜歡與成績無關，有些人唱歌不好聽也是愛唱歌，有些人打球不好，也是享受球場的奔馳；相反地，也有成績好但是是不喜歡的)，則你對數學相對其他科有比較高的抗壓能力。

面對挫折有良好的心態(例如:樂觀、精進)的人，也會具備比較好的抗壓能力。

我們前面提到壓力分為短期壓力與長期壓力，而將過多的壓力排解以長期與短期分別解釋如下:

◎如何增加自己長期抗壓/紓壓能力?

長期壓力幾乎都是短期壓力演變而來，對環境的適應較慢、抗壓與紓壓的不足是發展成期壓力的主要因素。透過規律生活作息(規律運動、定時睡眠、均衡飲食)、給自己保留跟自己說話的時間與空間、滾動式調整目標、幫自己加油打氣等習慣，都可以增加自己長期的抗壓能力。

◎如何增加自己短期抗壓/紓壓能力?

短期間的抗壓能力，時常面對接著還有未完之事要處理(書讀不完還有功課、上堂課聽不太懂緊接著還有下一堂等等)，這時需要我們馬上調整狀態，甚至強迫自己面對壓力。我們可以以「同時紓壓與受壓並行」、「轉移」、「呼吸術」、「目標再規劃」等方式面對。

-「同時紓壓與受壓並行」，指我們可以透過聽音樂、哼歌、邊吃(不建議)、及短暫閉上眼睛放鬆筋骨後再繼續等，同時紓壓在壓力下進行。

-「轉移」，指暫時停止當下的事情，進行洗澡、適度運動、飲食、家事等不需思考事項、或將其他事情調整先做，等待自身身心恢復後再回來面對。

-「呼吸術」，以專注力恢復抗壓能力的方法，在第三小節會在詳細介紹，它是需要比較需要練習才能學會的方法。

-「目標再規劃」，透過對目標的再次調整，短時間可以有效解放壓力的方法，但是只是將這些待處理的事情移轉至(例如)明天，明天的壓力是依然很大的。規劃能力的好壞，與事情發生掌握能力是這種方式成功與否的關鍵。

上述這些都是比較透過外在方式調整身心，而另一方面我們內心的抗壓性，可以透過時間、空間、認知(心態)三方面進行調整。

「時間」上一個章節用 3 個小時去研讀與 6 個小時去研讀，心理壓力是截然不同。在自己可以接受的時間下去即早安排，也就是為什麼有課前預習對上課的壓力是比較小的。

「空間」上，現實空間固然影響心理，如擁擠的空間、窄小的桌椅都會使心理緊張，可以想像書唸到一半書本因為碰撞掉落、文具掉落的景象。但這邊更要說的是，內心的空間，那兒有你對這些事的容忍程度、你與別人的空間，也就是--這些事情的在你內心可以存放的空間，它占有越大的位置你就會表現出它的壓力，因此我們常聽到人說「放下」、「放不下」就是在指這件事情。雖然「放下」可以讓我們從壓力下獲得解脫，但在學習的過程中，放下不只是「妥協」，而是你掌握住學習的眞諦，即「學習對你來說是什麼」。

在上述中還有提及與他人的空間，意思指常你覺得別人都做得到我自己也要做到，這樣的心理在空間中也會自然產生重要的位置，它會漸漸成為「你對自己存在的認證」，如同所有學習的初心一樣，我們都要去思考「學習對你是怎麼一回事」。

(心理認知)心態中，我們透過別人的(不一定指是老師、爸媽與同學，也可能是新聞、報章雜誌等媒體)明示、暗示，讓我們對事物都會有所成見、有所偏好、有所不平等。當心與事物自然產生反應，有所偏好會誘發不平等、不平等會使你心不清境，這樣混亂的心境讓你在學習、決策容易產生問題、瑕疵。

即心自然的反應，反應中我們產生喜歡與不喜歡(偏好)，偏好產生不平等(我們覺得這個重要、那個不重要)，不平等的心產生不清境的心(讓我們覺得重要的更好)。

當我們認識自己的心會這樣時，就會知道心中的壓力也是自然的現象，若我們用第三視角來觀看現在軀殼中的自己，我們便可以察覺這樣的心的壓力。

內、外在的壓力小了，學習疲倦的情況就會減少，因為清楚自己的目標、做好壓力的調解與規劃、正確覺悟的心態等，都會引導我們在學習道路上可以順暢。

◎上述都是避免進入學習倦怠期的方針，但若已經身困倦怠期的泥淖，又該如何自拔呢?

一切依然要由心發起驅動，由陷入倦怠期的自己、或師長親友的援手，讓自己的心產生了想改變的想法開始。沒有發自內心想改變的衝動，所做的事是事倍功半的。

學習倦怠期，通常是二種類型。一則是「課業的持續落後」，一則是「心態持續的倦怠」。兩種類型無論是哪一種，都需要認知一件事情，「失敗」是正常的現象，每一件大大小小的事情中，都是有失敗的可能，所以今天有發生的失敗也是很正常的一件事

情。我們的心態是要在失敗中，站起來來、面對問題、重新省思問題的成因。

「成功」，也並不是說你的方法就對了，有時候只是運氣好因為失敗的沒發生，不見得就是一件好事情呢。我們常用成績來評量學習的好壞，一直都是台灣及周遭國家的方法，我們要有一個觀念:成績好只代表你會考試，並不能說明你的學習態度、方法都是正確，也不能保證你的學習倦怠期很短而不會發生。這個世代的人，除基本的能力外，我們要獲得的能力是具備素養的終生學習者。

註:要不要當個成績好、很會考試的人，各位讀者可以思考，畢竟這樣理想化的學習態度固然是好，但是能在未來社會上能活得下來，使自己有競爭力，成績、名校都是之前社會的評斷標準，但是要成為怎樣的人是由自己決定的。

當我們的讀書、學習方法屢次失敗的經驗中，你要認識到這樣是正常的，再調整吧。不放棄、毅力、觀察、省思，修正再修正，調整再調整適合自己的環境、適合自己的節奏，在當中不斷理解自己這副身體、了解自己，面對挫折而不會戰敗的抗壓心態也會在當中培養起來。

在上述心態建立後，我們開始介紹常見的這兩種類型:

「課業落後型」，若落後有一定時間要追上不是件容易的事情，但在數學學科中常會有「斷點」，意思就是一個新章節，和之前沒有很大關聯性，這個「斷點」就是重新出發的機會，我們就要好好把握，在這裡跟上大家。

若是都是相關聯的內容，我們穩住心在章節中，以「這個章節在學什麼(學習目標)」、「它的想法如何實作」、「新舊過往關聯(過

去所學和今天所學的關聯)」三大主軸，將其基本的內容先掌握住，困難的、需要很長時間思考類型的則安排一天一點的推進。

另一方面，制定複習計畫，在今天教室都在網路上的科技世代，各式的資源都可以為你所用，我們的安排需要有一定滿足自己的成就感、回饋(讓自己有眞實學到東西的計畫安排，很多人買了參考書、買了補習班複習課程，結果又被課程的困難所打敗)，避免又掉入學習倦怠。

「心態倦怠型」，一種成績還是不錯、一種挫折的陰影的影響，這兩種都是成績中、前段的讀者會有的。因為這些「學習」，他們之前學習過、或是曾經在這邊跌倒過，身心升起保護的情感，避免自己的自信受到挫折。這些人知道有考試技巧、懂得繞彎取得題目的結果；或是這些學習它都已經完成，且大腦也判定再次學習的結果不會有什麼意義，因而直接產生倦怠。

註:後著這現象，也是學校多數老師不喜歡同學去補習班進行先修的原因之一，若班上有多數同學先修了課程，則老師在課堂一步步帶起來過程中，產生很多未學習過的同學的極大壓力，那些先修過的孩子在課堂中隨意的態度也會引起班上的不好的風氣。

對於逃避挑戰的人，我們只能建議:學習本來就是有所擅長及不擅長，雖然透過分數掩飾了這個你不想被人所知道的事實，但是數學科一直都是環環相扣、將來還是會碰得到。嘗試去打開自己的心房，一步步的去了解，相信自己是辦得到的。

而另一類的人，則這樣建議:我們事實上所學都是「精簡」過的東西，我們常常都是會算了題目、背熟了公式、講得出定義，就結束了這個數學章節，而事實上，這些都是「會的人」才「呈現

出來的」，但是「呈現出來的」的人並不一定是「會的人」，會有人「精進難題」方向去走，而編者建議「精進思考」，去思考這些為什麼，去回溯為什麼，才是學習者的精神。不管是怎樣的環境，點燃學習的熱情吧。

註:轉移，看小說、玩手遊是否算是轉移的方法呢? 這個問題，在於休閒遊戲活動是否也算是學習的一種呢? 轉移目的，在於短時間的讓心情放鬆、舒緩壓力，而這些休閒活動若是反而增加自己的壓力，我們的轉移效果就不大了。現今，看小說、打手遊都是需要「認眞」進行而言，反而算是一種學習，小說需要連結各個角色的關係與推理故事進展、手遊需要即時反應與各種角色的組合配合，都已經算是一種非正規的學習。若我們也想經營好自己悠閒活動，編者除了提醒時間安排外，也希望各位讀者可以考量親人間的共同語言，別活在自己與這些休閒活動的世界中，有共同語言才能溝通，這也是現今為什麼親子都常無法溝通的原因。

b. 注意力(attention)

曾經有個這樣的案例，「有個聰明的同學，學習常跟不上大家。但實際教導後，發現他根本一點就通，完全不像是個成績跟不上、作業完成不了的同學。問他是上課聽不懂嗎? 他回答很像聽得懂，又有些不知道懂不懂。觀察到他無時無刻都感覺碰碰跳跳的，靜不下來。嘗試給了他解決方案:靜靜坐下來把書上那幾頁一行行字念完後，嘗試自己解決下面的幾個練習，他坐了下來後，幾分鐘後他就開始分心了。」，這個案例中「心靜不下來」是編者覺得第二重要的課題，因此在這小節中討論這件事情。

這樣的現象算是「學習倦怠」嗎? 不妨回第一小節比對看看。

答案是:

答案是「是的」，是內心抗壓性的空間議題有相關的概念。若我們心中「學習」的份量是很低，而「其他事」份量比較高，則學習對他來說是一種意義不大的事情，它像是應付的日常事項。當外在壓力給他時，兩著的壓力有極大的差距，也容易產生排斥、過大壓力的學習倦怠。

我們嘗試告訴自己，此時就是做這件事情，心想其他事情，另一件事情也不會有所進度，手上的事情勢必要先處理完成的，我們就先專注在這件事情上就好。

我們一般來說，會以「沒興趣」來詮釋這樣的情況，但實際上是學習動機不足(不懂為何要學)及對外在事物反應過於充分兩種成因，而「分心」是這樣情況的重要表現之一。

一般而言，當我們開啟學習模式時，隨著環境的安全，身體會放鬆外在的戒備，漸漸忽視周遭部分的訊息，我們可能忽略旁邊的人說了什麼，忽略不遠處的狗叫聲，使精神都集中在眼前的紙張、紙筆之間。(這也是為什麼環境會造成額外的壓力造成學習倦怠)但是「心靜不下來」的同學，則是會對周遭環境持續做出反應，他不容易只專注在一張白紙、幾行文字之間。學習動機是需要自己透過思考去省思，為什麼自己要學習的，而造成專注力不足原因是很多可能，例如:小時候的陪伴的不夠、飲食、過去的訓練不足(遊戲中比較少接觸)、習慣同時進行多件事情、心中有其他更在意的事情等等，久而久之這樣的學習缺乏組織、時常漏東漏西，足夠的專注力的培養是非常重要的。

「前期」:在開始的前期，可以將桌面上會分心的東西清掉，鉛筆盒中也精簡至只有必需品。(鉛筆盒上飾品、身上飾品也收起來)練習專注在小範圍中，可以持續 5~10 分鐘後，逐漸增加時間。直至可以在離開後返回也可以持續專注在小範圍上。

「中期」:練習專注在一個事情中，可以透過看書、畫圖、拼圖、棋類、鋼琴等靜態活動(不建議以手遊作為練習活動)；或是連續進行的動態活動:如舞蹈(需要長時間專注的舞蹈)、攀岩、桌球等等，以連續進行 30 分鐘以上專注能力，直至有 50 分鐘以上的專注能力。

「後期」:進行設定一個目標後，沒達到目標不停止的練習。例如:將一篇長篇故事看完才可以進行下一件事情。直至發自內心排除其他干擾，專注地自己完成該事項。

若可以完成三階段的注意力的訓練，則會有實質上注意力不足的改善，若真的還是有問題務必尋求醫學上的幫助，勿延宕現階段的黃金學習時間。

任何的學習都是心靜而生智慧，透過專注的能力可以讓你集中思考方向、觀察與比對過往經驗，都是需要思考的。不是就是複製一次圖像、再現老師的計算就是學習，而是我們要去思考每個理由，而這樣的過程是需要專注的能力。

註:長時間專注是會疲倦的，尤其是眼睛與支撐上半身的肩頸、手腕，雖然對學習有極大的幫助，但是也要提醒自己要適度的休息。

c. 觀呼吸術

觀呼吸術，是可以釋放短期壓力的方法。它是「轉移」的的進階方法，只做「觀察」這件事情，忽略眼耳鼻舌等器官收到的訊息，以冷靜、專心去觀察自己的呼吸，閉上雙眼「觀察」空氣進入鼻後，深入咽而進入喉，入肺後，至橫膈肌上升，微微閉氣至腹部微隆，數秒後將氣息緩緩緩呼出，幾個循環後，或可將心中雜念排除。

吐氣的時間是呼吸的 1.5 倍至 2 倍，例如:吸氣 3 秒，吐氣 4.5 秒至 6 秒，秒數要多久由自己肺活量而量力而為，輕鬆即可。

呼吸術的頻率，約一分鐘完成 4 至 6 次。吸、吐氣都要放鬆、平緩，用身體去觀察自己身邊體的變化。

使用觀呼吸術的流程是這樣的:

◎學習空間空氣流通(若是密閉空間，則開門窗數分鐘)

→活動身體:活動四肢、擺動身軀，暖身運動

→靜坐或是站立、躺著，使用呼吸術數次

→(自我暗示)(self-suggestion)

→重新整理思緒，和自己確定現在要做什麼。

完成觀呼吸術後，我們建議對自己使用「自我暗示」，就是像球上球員的吶喊「喝!」一聲，替自己加油、幫助自己專注。我們也可以對自己說「好!」「加油!」「我辦得到!」來替自己加油。

觀呼吸術的使用，透過深度腹式呼吸的過程，讓久坐的身體中缺氧的細胞可以獲得氧氣，也可順勢伸個懶腰、活動筋骨。但是，有一點要特別注意，就是空氣中的含氧量，若我們在密封、接近

密閉空間中，空氣中氧氣的比例會隨著你在裡頭的時間越久而減少，需要將其內空氣流通一下。也就是為什麼在房間念書好想睡覺、走出房間後忽然又有精神了。當身體被受壓力時，身體耗氧增加是平時的 2 倍以上，因此注意學習空間空氣的流通也是重要的。

註:觀呼吸術，只是一種去除雜念、緩解壓力的方法，使用上也不是那樣容易，心中紛亂想法與忽略外界訊息的專注都是有一定難度的，需要長時間的練習。

在學習時，你有觀察過你的呼吸是正常的嗎? 有些人的人呼吸在計算時，會秉住呼吸(停止呼吸)、或是閱讀大量字時會忘記呼吸、亦或是相反產生過度換氣的狀況，一般我們使用的胸式呼吸，胸式呼吸使用上三分之一的肺進行換氣，因為吸得淺呼得也淺，可以快速的換氣，例如:在百米快跑時那樣的喘我們快速的換氣方式，就會特別明顯。

我們可以在一般呼吸(胸式呼吸)中搭配幾個腹式呼吸，加強身體換氣的強度。我們在壓力下這些呼吸問題，或許你沒注意過，可以提醒自己檢視一下自己的呼吸住況

，讓身體保持在比較好的學習狀態。

註:觀察呼吸中，常常都是馬上就會生起各式各樣的念頭，像是「剛剛的聲音是什麼?」、「剛剛才讀完一半，還剩下半個小時，好煩阿」，一旁的聲音使你忘記繼續觀察呼吸，在放鬆身體時又去除雜念是不容易的，若觀想的方法對你來說太不容易，可以換將剛剛你正在有困難/壓力的問題(或是剛剛所學的東西)在腦中以冥想的方式重新演練一次，也會有同樣地效果。

註:觀呼吸術也可以配合香味、音樂一齊實施，或許也有更好的放鬆效果。或是在美麗的地方、近大自然的地方、自己熟悉的地方也都是比較好放鬆的環境。

註:觀呼吸術，若執行上有困難上，也可以以想像力去想像體內空氣緩慢沿著右手線條輪廓，以想像氣息行走的方式繞了手一圈(肩膀、手臂、手軸、手腕、每隻指頭、指尖…)，進而實行觀呼吸。

d.「心」

心，是一切的根源，即使你的「學習」是被強迫的，你的心依然也在學習著「接受」，面對失敗、困境的你，你的心也依然會去尋找改變的機會、探究接受的可能性。

和自己對話、協調，明白自己「所想」，其實也就是「詢問」，問自己能否接受、自己是否願意做出改變。也就是雖然別人一直對陷入困境的人提出幫助的方法，卻效果有限，那個人也不願意有所改變，是因為他的心並沒有有改變的意思。

常常我們充滿矛盾之處就在這裡，有些人根本沒有和自己溝通過，也沒思考過這些問題，當與別人的觀點不同時，也沒有將自己心中的結果在適合的時間、適合的說法表達出，因此常常溝通問題就卡死在這一階段了。

當我們心中終於決定想要改變，「試看看吧!」的聲音從心中傳出時，我們便進入「發心」的階段。我們起了一個想法、想要在一個「時間點上的一個成效」，若能成功我們必然會覺得可行，若失敗我們再進行討論要繼續嗎。「發心」階段是試圖改變的試

金石，例如:「我就每天寫十題數學，下次考試希望能進步 10 分」。這個階段中，很常因為不夠了解「學習」是怎麼一回事、不夠了解自己問題所在、引用了錯誤的典範(paradigm)(學習了別人不適合自己的讀書方法)、不適合的成功目標等等因素，「改變」的火苗在風雨中一次次澆熄，容易漸漸陷入無止盡的學習倦怠期。

1. 學習的方法是否正確/是否適合自己，包含讀書時間、規劃、方式(例如:很多人學習方法只有練習題目，不是很正確的做法)。
2. 學習陷入困境的原因，是自己心態、讀書方法、練習不夠多、還是考試技巧不足等等，我們要先知道原因。
3. 複製別人的方法(買一樣的參考書、讀多久時間的書、上哪家補習班等等)，可以快速的和別人一樣，是我們心理想的，但是常被遺忘的是每一個人的所學、理解的模型不一樣，有可能完全不適合，甚至都不是是好的學習方式。但我們可以將其方法作為參考，它依舊是很好參考的依據。
4. 適合的目標，這點是很重要的，能不能繼續燒起「這份決心」依然是靠這次是否有所收穫而定，知道自己這次行動的期望也是重要的。

在不斷累積發心後的經驗後，「發心」會逐漸轉成「決心(decide)」，會有足夠的信心與明確的目標，在這之間制定的計畫可能成功或失敗，也不會使你氣餒。相對的，在「決心」階段受挫的人，倦怠的恢復期也是較久的，也不禁會質問自己「到底能力在哪裡」、「為什麼這麼努力了還是只有這樣」、「我果然還是不行」等等，那些對於自我人格的否定的念頭。

也就是在這階段失敗，走出來是很困難的，每當你想要振作，那些「我不知道我可不可以做到」的聲音會困擾著你。鼓起勇氣後去接受那樣的自己，面對那些也是自己的負面聲音。面對挫敗受傷的內心，讓自己接受人的失敗是很正常，走路也會有跌倒的時候，我們要選擇站起來繼續走，還是就讓自己倒在一旁了呢。

決心階段的失敗，有可能是發心階段所累積的錯誤經驗造成，也就是也可能之前都是碰巧或是剛好可以這樣做，致使你覺得這個長久的計畫也可以這樣做。另一種可能，這個計畫是沒有類似經驗/或是使用新的方式，並沒有可以借鏡的，且也不知道失敗的問題點在哪裡，則這個的問題就是困難的，需要靜下心來不斷地反覆檢討自己。

明確知道失敗的問題點的話，在這階段的話是不會被失敗所打敗的，修正後再來就好。

在這階段中，「規劃」的好壞常常都是成功與失敗的關鍵。一般來說，當一件事情考慮的周詳程度越高，它的失敗的機率是越低的；越了解自己的人，越可以訂定適合自己的目標，目標的高低的好壞，決定這次進步的程度與收穫程度。在這邊有個重點就是，很多人搞錯目標了，以至於整個努力的方向是錯的。在設立目標時，不只是考慮眼前的現況，而是要思考遠一點，像是數學練習多的題數作為讓數學進步的目標這種，真的要再三思量自己「真正」的問題所在。

決心的心隨著時間、累積經驗等因素而呈現一種穩定的狀態，稱「心態(attitude)」。心態隨著不同事物有著一定規則的模式，而成一種內在的主觀看法。例如:將每件事情小心翼翼的處理好，每個小細節都不馬虎，是種心態。

例如:認為所有事情我都做不好，小到最小的細節，我可能都比不上別人，也是種心態。

例如:有些同學一個題目，會練習了數十遍，才肯定地說我會了；有些人只練過一遍，便說我已經會了；有些人，看都沒看過題目，便放棄了，我不可能會的。

我們可以觀察這些，變成心態後，已經成為你做人處事的一種態度，可能是正面的、也可能是負面的，這種心態或許有針對性、也可能全面性，例如:放棄數學、與放棄學習。

因此，我們整理這個小節中，整個「心」的變化:

與心的對話→初發心→發心→決心→心態　。

那些累積的壓力、失敗的情緒累積成的學習倦怠，遺憾的也有可變成一種心態，將很難再對學習有熱情。當我們知道這些，或是我們身邊、自己知道這樣事實時，我們依然也是可以改變的，從發心開始對自己，自己再給一次機會吧!

e. 再給自己一次機會，盡力、計畫與執行

學習的成功與失敗，其實決定於自己的心，是不是要成為別人眼中的成功者，也是決定於自己的心。失敗是正常的事情，成功也不見得是眞的成功，我們一定要銘記於心。面對學習的執行，我們都當最後一次；面對挫折，我們給自己再一次機會。

在這個小節中，我們提醒幾個學習的點中，其他的關鍵:

1. 考試技巧:很多人的學習好與壞，其實跟學習沒那麼相關，卻與考試較有關。

(一) 心理:在考場中，那種與大家如臨大敵、緊張肅殺的氣氛，使人壓力很大、腦袋一片空白、身上汗水如雨下、焦慮身體不適、頭暈肚子疼等，若有強大的心理素質、抗壓/紓壓能力就能緩解這樣的情況，也可以多參加「比賽」類型的活動，讓自己習慣這樣的「戰場」。

(二) 作答:我們時常聽到老師、朋友分享:會的題目要先做，如果遇到不會的先跳過，哪種題型要先做等等。其實作答技巧也和上述的「心理」有極大的關係，若在極大壓力下，也會容易判斷錯誤，在時間分配上的錯誤也會跟著發生；若發現很多不會的，更使自己壓力上更加一層壓力。有一點可以確定的，這樣混亂的答題中，很有可能發揮不了自己的實力，甚至分數只有你該得到的一半不到。冷靜下來，將壓力紓解，這是答題的第一要務。會的題目也要先往握住，剩餘的時間才分配給比較不會的題目。

但是一般正確學習過程、老師出卷難度正常來說，學習階段的試卷都是要是要全會的，因此作答技巧也是非常重要影響因素。

(三) 計算錯誤:在考試過程中，計算速度與計算錯誤是兩件重要的事情，它也往往決定最後有沒有得到分數。但它也常常是被忽略的一件事情，因為多數的人考試中並沒有「預留時間」的習慣，因此考試時間往往是很充足的，多數人覺得「我計算時就已經檢查過了，有了一種我不需要再次檢查的自信」，然而真實數據告訴我們那是錯的。當我們要求自己一場 50 分鐘考試只能作答 40 分鐘時，不免也是手忙腳亂的，計算速度的差距就會凸顯出來。那麼，有個問題「同類型題目」多算幾遍就可以增加「整體」的計算速度嗎? 答案是可以的，但是效果是有限的。

計算速度取決於基礎的計算，基礎計算也就是數字的加減乘除的計算，在本書最後章節中會特別訓練。

至於計算正確，也是另一個被忽略的關鍵，我們需要統計自己計算正確的頻率。若一種類型的題目只做對一次、失敗了二次，那麼你說你會了，依照比率來看你只有三分之一的正確率呢。為什麼會這樣呢?因為我們習慣將這三題都當作自己完成、練習過了三次作為自己參考數據，而不是正確率只有三分

之一。當有一題，你沒有對過，練習十次都是錯的，都是通過訂正才對，這樣還可以信誓旦旦的說自己會這一題了嗎。對自己嚴格點吧，仔細檢查平時錯了多少次、答對了多少次，自己眞的會了嗎。

(四) 考試技巧的專研:你不禁會好奇，考試不就是把平時所學的以紙筆表現出來嗎，還有其他技巧在裡頭嗎。若你將考試當作一場上百人、千人、數十萬人的武士的在拼鬥，大家都是用一樣的劍術嗎? 還有場地、時間、服裝、佩劍及武士的心態的調適，白話來說例如:解題時的刪去法、去猜出題者心思、答案順序的安排等等，雖然編者不鼓勵大家都當個考試戰神，但是在考場淬鍊出的強大精神與技巧，也是一種令人學習的態度。

(五) 檢討:訂正錯誤是看起來很枯燥的事情，將答案塡上、再把過程寫上，許多人都覺得結束了。多少錯誤是眞的觀念有錯誤的、看錯的、抄寫錯誤的、猜對的、雖然答案對了但是過程是錯的、及計算錯誤的，都藏在裡頭。所以我們老是沒有解決到根本的問題，許許多多的小問題，都是可以被我們仔細發現然後改善的。

2. 筆記能力:在過去的學習經驗中，不知道大家有沒有重複抄寫老師給的筆記的經驗，或是直接將參考書整理好的資料直接給背了起來，這些「筆記」化的資料，是別人整理好的東西，能不能完整的被你吸收，「你知道編寫者寫下的宗旨嗎? 你知道編寫者的心中規劃與目的嗎?」，這也是為什麼一套課本，不同的老師卻可以講出完全不同風格的內容。

(也同時說明了一件重要的事情，我們所讀的課本、教材也是被整理、包裝過的資料，有興趣的同學可以思考看看，真正的知識、學問又該是怎麼樣子的呢)

將所學的東西以「系統」化的方式呈現，就是筆記的概念。透過筆記，我們可以整理目前你所學的狀況，能寫出自己的筆記，自己是能夠保證 100%的吸收。因此，筆記的能力才是學習能力的展現；在考試層面上，試問你難道考試都要帶著一堆課本，考前幾百頁一直翻著看嗎? 嘗試動筆寫出自己的筆記吧。

3. 學習規劃:規劃，在考試層面上著重在「重點」，而在學習的角度上則以「全面」為主。規劃中有以時間(週、日)進行安排、以完成項目進行規劃等等。規劃看似簡單但實質上你要對這些內容非常熟悉、安排的時間多少足夠，都是需要有經驗的人才會有的概念，規劃好後要請師長幫忙檢視這樣的安排是否得宜，比較可能少走冤枉路。計畫不是計畫，要執行! 沒有成功執行也要記錄下，為什麼沒有執行的原因，下次的計畫就要考量同樣的因素。

規劃有沒有方向性的原則呢? 是有的，有下列五個原則。

(一)目標要具體明確列出，不要含糊。

(二)目標成效要可以衡量、可以區分出成功/失敗。

(三)目標要可以實際達成，且不能離自己能力相差太多。

(四)目標應該配合不同單元、自己能力調整。

(五)所有規劃都要有時間性。

規劃應該要有三個大部分:

(一)規劃基礎:開始規劃前，我們要再次確定自己的心意、手上的資源、時間及自己規劃前的其他注意行程。

(二)規劃主體:計畫主體，以要解決的問題為中心，拆分整個時間軸、決定每個階段該完成的項目，以逐漸調整至週計畫、日計畫。

(三)實施與檢討:確實執行、詳細紀錄每個過程、達成情形，並不斷監視計畫執行、適時調整計畫(很重要)(又稱「再規劃」)。

4. 盡力與調整:真的盡力了就好，身體是一輩子的，該休息就要休息，不要因為昨日的進度未達到，於是熬夜拼到完(這樣也依然會影響到隔天的進度的)。或許現在的身體、大腦真的是無法理解的東西，真的盡力了就註記下來，以後多學點東西後再回過頭來看吧。

5. 自我學習:所有學習中，最難得可貴的學習、發自於內心最真誠的對於知識、真理的追求，自己給自己當導師，安排學習的過程與學習進度，探索未知的世界中，學習是快樂、沒有壓力的、沒有考試的，世界的每個人是你的老

師、大自然是你的老師、網路是你的老師，自己去思考、試驗出答案，並將以驗證，對於其他相關需要的知識，自己蒐集資料、並將其學會。

若學習是這麼令人開心，不是很棒的一件事情嗎。

6. 網路:在現在世代中，網路/網路遊戲成癮的現在越來越正常化，網路對於知識的是很有幫助的，可以去尋找不同的人對於同一問題的看法與解決之法。另一方面來說，因為長時間的接觸也容易沉迷在社交軟體、遊戲的網路世界中，那些相對是很新穎的資訊、有同儕之間的社交語言，但是對我們所處社會的學習壓力下，那樣的世界常常是成為一個逃避、躲藏的避風港。在那樣的世界，有著不同學校、家庭不同的快樂，「學習」透過網路的幫助，可說是如如虎添翼，但若是將它當作是現實世界的避風港，則我們就太大材小用它了。

遊戲，其實是學習的發展的一部分，透過模擬、互動、規則化、策略及以競賽等方式將社會、想表達寓意的部分娛樂化，目前社會的觀點還是會以打發時間、娛樂為主要目的。但是既然是多麼讓人喜愛的遊戲，編者建議我們遊戲還是要玩，還是要「聰明的玩遊戲」。

去嘗試思考這樣有限的時間中如何玩出 top 級的水平、觀察網路社會中怎麼樣以文字和人溝通、如何在異國中在語言不同文字不同中存活下去等等，都是課堂學不到的課程，同時也是社會上需要的能力之一。遊戲不是宣洩情緒的地方，也不是逃避問題的世界，它同樣也是某個眞實世

界的縮影，我們要問自己知道自己正在玩遊戲嗎? 用健康的心態去面對遊戲吧。

學習的道路上往往都是很困難的，希望這個章節可以幫助到各位讀者，從學習的困境中走出來，並成就一顆堅強的學習之心。

註:在文中有另一常是很大壓力的來源之一，便是環境的適應力，在熟悉的環境下常常是多數人習慣在「安心」下進行學習、考試，但一旦改變了大環境，例如:馬上就進入國中的新環境，又要重新適應陌生的教室、老師、同學，老師有不同的上課方式、新的同學也需要彼此磨合，有的人可以很快適應這一切，有些人則需要很長一段時間才能慢慢習慣，這些「不適應」很有可能影響初期的學習，進而影響整個學習上的問題，適應環境的能力也是非常重要的。平時，讓自己走出舒適圈，培養交際手段、認識世界上有各式各樣形形色色的人、體驗有不同的領導風格的老師等，都可以讓自己增加對環境的適應能力。

註:我們有時會因為請假、公假、身體不適等，造成學習上的斷層。因為許多課程是無法重來一次的，因此也會有整個遺漏一部分的學習，使接下去的課程的學習出現問題。因此，自我學習的能力是非常重要的，當我們還不具備這麼強的能力前，我們對整個的掌握一定要處於「主動」，清楚老師接下來會上些怎樣的內容，如此才可掌握住「關鍵字」，才容易接上之前缺失的部分。網路上的資源，我們也可以好好善用。

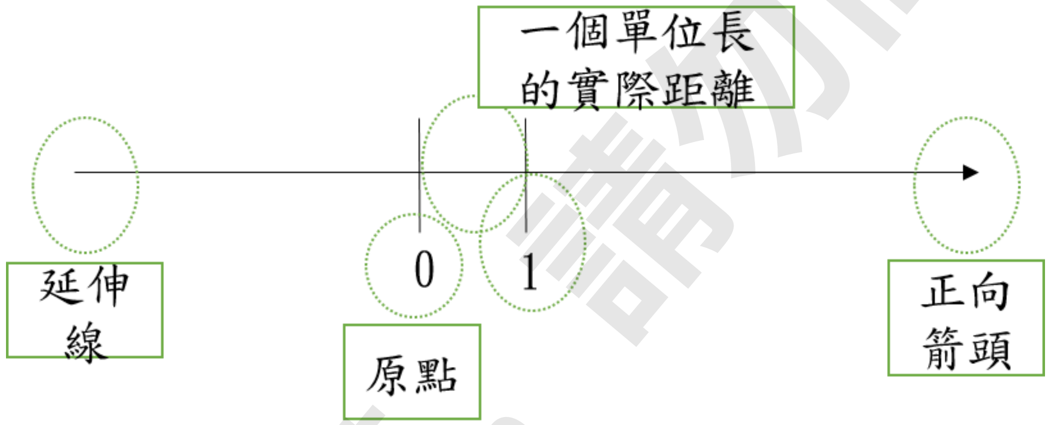
第 11 章 數線、負數、絕對值

這個章節起，便是國中一年的範圍。

在小學的課程中，我們都是學習數線上，以「0」開始的數學，我們學習了整數、小數、分數。那麼，在「0」的另一邊有什麼呢?

a. 數線(number line)與負數(negative number)

數線，在一條筆直的線段上，需滿足「原點(origin)」、「正向(箭頭)」、「單位(unit)長度的表示」三個原則。



數線在以前的認知中，它是用來做什麼用呢? 它就像我們的「直尺」一般，用來丈量物體的長度、比較遠近等。

原點，就是作為大家基準的起始點，以原點開始去丈量長度。接著，數線上的數字是往哪個方向慢慢變大，它需要一個引導的箭頭。以及原點到第一個單位的比例尺，究竟 0 到 1 是代表 1 公分還是多少，需要告訴閱讀你畫數線的人。

在上面的數線箭頭，有個「正向」兩字。我們以「0」作為基準，比 0 大的我們稱這些數為「正數(positive number)」。相反地，若比 0 還小的數字，我們都稱為「負數」。

正數，我們會在數字前加上一個「+」符號，例如:$+5$、$+\frac{1}{3}$，讀作:「正五」及「正三分之一」，「+」就會有兩種意義，一種是代表正數(性質)、一種代表計算的「加」。當在計算時，上述例子又會讀作:「加五」、「加三分之一」。

另一方面，負數，我們會在數字前加上一個「−」，例如:-4、$-\frac{1}{2}$，讀作「負四」及「負二分之一」。同樣，「−」也有兩種意義，一代表負數(性質)、一代表計算的減號。當在計算時，上述例子又會讀作:「減五」、「減二分之一」。

註:在「0」、「+0」、「−0」中，沒有正負號的意義，只有加、減法的意義。

了解的正負數的表示法後，那正與負兩者之間是何種關係呢?

我們看下面幾個情境:

1.身上沒有任何錢的爸爸，媽媽給了他 100 元，則爸爸身上共有 100 元。爸爸買了便當 120 元，欠了便當店老闆 20 元。

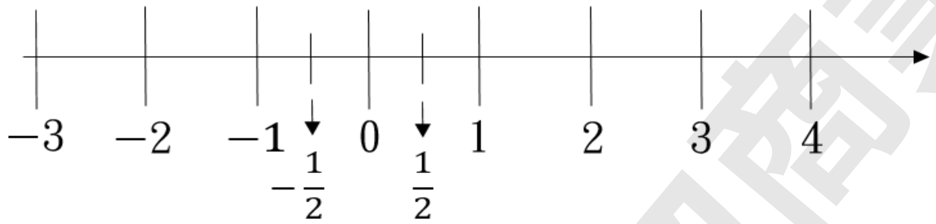
在上述例子中，爸爸因為媽媽給他 100 元，爸爸得到 100，以「$+100$」表示，欠了便當店老闆 20 元，則以「-20」表示。

2.爺爺從一樓開始往上爬樓梯，向上爬了 900 層階梯後，轉向向下往回走了 20 層階梯。爺爺向上爬了 900 層階梯，若以「$+900$」表示。向下往回走 20 層階梯，則以「-20」表示。

3.奶奶將 10 顆蘋果放入一個空紙箱中後，但覺得紙箱太舊了，於是她又將 10 顆蘋果拿了出來。則放入空紙箱 10 顆蘋果，以「$+10$」表示。拿出 10 顆蘋果，則以「-10」表示。

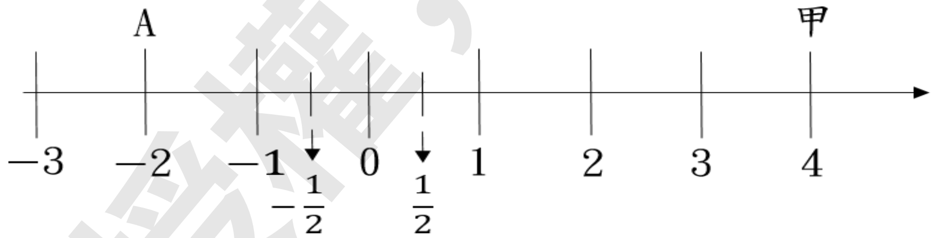
我們可以發現，正、負之間意義上是相反關係的存在，且數字相同時，一正一負相加時是 0，如第 3 個例子。空箱子增加了 10 顆蘋果，又拿走 10 顆蘋果，回到了 0 顆蘋果的空箱子。

我們知道了數線上「1、2、3、4、5、6⋯」以原點「0」作為基準點，則數線「-1、-2、-3、-4、-5、-6⋯」會對稱出現 0 的另一側。



在數線上，通常下方習慣擺放數字，若想表達「4」的位置上是甲，則會將「甲」標示在 4 的另一側的上方，文字上我們則以「甲(4)」來表示。

例如:A(-2)表示，在-2的位置上有 A。



同時，我們也發現在數線上，越往右，數越大；越往左，數越小。

小試身手:

1.(1)若以下午三點爲基準，下午五點記作+2，則早上 11 點記作

(　　　　)。

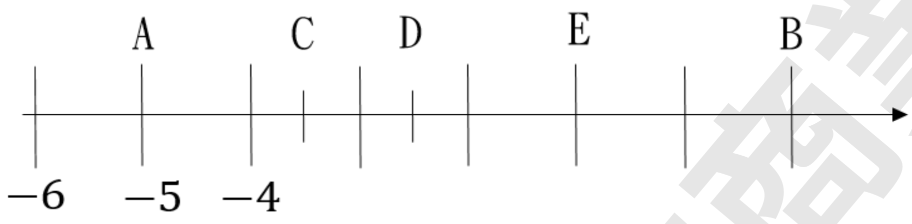
(2)若以 70 分當作基準，80 分記作+10，則考 55 分記作

(　　　　)。

2.(1)某商店營業額以 10000 元為基準，若營業額 12000 元記作「$+2$」，則-5代表營業額(　　　　)元。

(2)爸爸想要減肥，第一天秤重 85 公斤，第二天 84 公斤，記作「-1」。則十天後記作-6.5，則重(　　　　)公斤。

3.請完成下方數線，標示 A~E 的位置:



A(　　　)、B(　　　)、C(　　　)、D(　　　)、E(　　　)。

4.(1) $6\frac{1}{5}$ 在數線上的位置，比較靠近(　　　)。(請填 5 或 6)

(2)$-4\frac{1}{5}$ 在數線上的位置，比較靠近(　　　)。(請填-4或-5)

(3)小蝸牛在數線上 5 的位置，牠往左邊移動七個單位後向右移動五個單位，則牠的位置在原來的(　　　)。(請填右邊/左邊)

承上，小蝸牛再以同樣模式移動後二次後，最後位置在數線(　　　)上。

b. 絕對值(absolute value)

距離，以前我們說兩點 A、B 之間的距離長度，我們以$\overline{AB}$(或$\overline{BA}$)來表示，常使用在圖形上。

在國中後，我們有了一個新的表示方法，稱絕對值，常用於數線、數字符號之間的距離。則以「|」與「|」(一直線，不是數字 1 或英文的 i 或 L)框住所想表達的兩的端點的距離。

例如:兩點 A、B 之間的距離長度，我們以$|A-B|$或$|B-A|$來表示。其中$A-B$與$B-A$相減，代表 A、B 間距離，兩條「 | 」則代表距離至少要是 0 或是正數。

最短最短的距離，就是自己和自己本身，例如: $|A-A|=0$。絕對值的出現一大原因，就是要確保距離至少都要比 0 還要大。或許你會想說，距離不都是大數減去小數，自然是正的阿，如何會有負數的產生呢? 在現在起，有可能兩個端點的數可能你都不知道它是否是正數，不知道誰大誰小，或是不知道是否是一正、一負，更或是兩個都是負數的情況。

因此，當我們知道兩點 A、B，若 B 是比 A 還大，它們間距離必是正數時，絕對值是可以自直接去掉的，$|B-A|=B-A$。

那這時候若以$|A-B|$表示它們間的距離，也可否直接去掉絕對值嗎? 答案是不行的，因為 B 比 A 還大，相減後不會是正值，是不可以直接去掉絕對值的，而是要將表示法換成$|B-A|$後再去掉絕對值。

例如:數線上的 5 和 18，它們間的距離是多少?

$$|18-5|=|13|=13。$$

若以$|5-18|$，會產生負數，我們在下個小節後會再次運用負數的計算解決絕對值的這個問題。

當我們考慮原點與 9 的距離，我們以$|9-0|=|9|=9$。

當我們考慮原點與 A 的距離，我們以 $|A-0|$ 或是以$|0-A|$表示(不能去掉絕對值，這邊沒有說 A 是比原點 0 還大)。

這個表示式$|A-0|$中，減去了 0，相當於沒有減去的意思，我們又可以以我們以 $|A|$表示它。

所以，任何數 A 與原點的距離，可以以$|A-0|$、$|0-A|$、$|A|$表示，都是一樣的意思。

在數線上，3 與-3 與原點 0 的距離都是 3，而 3 與原點的絕對值表示式:「$|3-0|$、$|0-3|$、$|3|$」，且我們知道絕對值出來都要等於 3。

也就是:$|3-0|=$ 3

$|3|=$ 3 ，前面我們都沒有疑問。

$|0-3|=$ 3 ，這裡我們有點疑問，$0-3$ 除了距離之外，也有「爸爸身上沒有錢，但買了 3 元東西的意思，那麼爸爸不是該欠了 3 元才對嗎?」，即$|0-3|=|-3|=3$ 爸爸本身欠 3 元，付出+3 元。

另一方面，-3 與原點 0 的距離，同樣可以有下列表示:

$|-3-0|=|-3|=$ 3 任何數，減去 0 還是自己本身。

$|0-(-3)|=$ 3 ，我們需要思考一下究竟「$0-(-3)$」是什麼意思? 我們繼續引用爸爸沒有錢的例子，而(-3)則代表欠人 3 元的媽媽， $0-(-3)$就代表「爸爸比媽媽還要多 3 元」的意思。

故式子:$|0-(-3)|=|3|=$ 3。(注意減去的負號要加上括號)

我們仔細觀察、思考這些例子，會得到一些絕對值的通則:

當$A>0$時，$|A|=A$。 例如: $|15|=15$。

當$A>0$時，$|-A|=A$。 例如: $|-15|=15$。

當$A=0$時，$|A|=0$。 例如: $|0|=0$。

當$A<0$的情況，在下面小節學習負數的運算後再回過來說明。

小試身手:

1.(1)$|-56| = ($　　　　$)$。

(2) $|-56| - |-44| = ($　　　　$)$。

(3) $|-5| < A < |10|$ 且 A 爲整數，則 A 可能爲(　　　　　　　　)。

(4)$0 < |A| < 3$ 且 A 爲整數，則 A 可能爲(　　　　　　　　)。

2.若數線上，A 在 B 的左邊，$|B - A| = ($　　　　　　　　$)$。

（請以 A、B 表示）

3.在數線上，A(-2)、B(2)、C(5)、D(8)，則$|B - A| =($　　　　$)$，

$|B - D| =($　　　　$)$，$|D - C| =($　　　　$)$。

4.是非題:

(1)(　　)若$A = B$，則$|A| = |B|$。

(2)(　　)若$|A| = |B|$，則$A = B$。

(3)(　　)數線上A 到 C 的距離，可以以$|A - C|$或$|C - A|$或

$|A| - |C|$來表示。

(4)(　　)數線上有一點 A，距離原點 5，則 A 存在有兩種可能。

(5)(　　)數線上 A(-1)、B(5)，則 A 與 B 之間距離 4 個單位，以

絕對值表示$|A - B| = |5 - 1| = 4$。

C. 負整數的加減計算

正、負數的加減計算，共分成了四種類型。

(1)正數+正數 或是 正數−正數

(2)正數+負數 或是 正數−負數

(3)負數+正數 或是 負數−正數

(4)負數+負數 或是 負數−負數

◎在第一種情況:

(正數與正數相加相信大家都已經沒問題)，正數與正數相減，有兩種情況。

一種是大數−小數，也是屬於大家都會的範圍。

另一種是小數−大數的情況，我們可以想像身上只有 10 元，若想購買 12 元的鉛筆，是不夠 2 元的。而這個「不夠」的 2 元，是怎麼得到的呢? 我們是透過將想買的 12 元的鉛筆−自己身上有的 10 元，得知不夠了 2 元。

透過這個想法，當我們遇到小數−大數時，我們會將大數−小數後，再將其結果前方給上「−」負號。

例如:12−18= −6。

◎第二種情況:

正數+負數，若自己身上有 1000 元，和一張罰單 500，則身上共有多少錢呢?罰單是要交付自己身上的錢的，雖然我們清算自己身上共有多少錢，身上的錢要減去交付出去的錢後才是自己真的留有的錢。

例如: $400 + (-150) = 400 - 150 = 250$。

我們也會遇到要支付出去的錢還是比自己身上的錢還多的情形。

例如: $200 + (-600) = 200 - 600 = -400$。

正數–負數，在絕對值單元我們曾舉例過這個例子，爸爸購買東西，原本應該要付錢買的，老闆竟然東西直接給他還在給他錢的例子，便是這個類型。

例如: $500 - (-3) = 500 + 3 = 503$。

◎第三種類型:

負數+正數，我們可以想像，身上只有 800 元的爸爸，不夠 200 元買車票，媽媽給了爸爸 200 元，爸爸就可以剛好買了車票，爸爸身上變成 0 元。若媽媽只給了爸爸 100 元的話，爸爸還是不夠 100 元買車票。若媽媽給了爸爸 400 元，爸爸買了車票後，身上還會有 200 元。

在這個例子中，我們可以知道，原本-200買車票的爸爸，身上最後有多少錢、夠不夠錢買車票是看媽媽給了多少。

若媽媽給了 100 元，則-200的爸爸，依然不夠 100，而這個 100 是如何得到呢? $-200 + 100 = -100$，我們實際上，將 200–100後，再將結果加上了負號。

若媽媽給了 400 元時。$-200 + 400 = 200$，我們將 400 減去 200 得到 200，或是將 400 拆成與前面-200可以相互抵銷的 200，剩下來的 200。

例如: $-250 + 400 = 150$。

例如: $-45 + 30 = -15$

負數−正數，爸爸身上 800 元，不夠 200 元買車票，兒子吵著爸爸要買 100 元玩具，則爸爸變得不夠 300 元買車票。

從這個例子中，爸爸原本不夠 200，又再多花了 100，

$$\text{即:}-200-100=-300\text{。}$$

事實上，我們在思想上用了逆分配律，$-(200+100)=-300$。

例如: $-18-12=-30$。

◎在第四種類型:

負數+負數，這個類型和「負數−正數」是極類似的，上述例子最後爸爸不夠 300 元購買車票，爸爸的-300，是爸爸最後「共」有多少錢。

$$\text{即:}-200+(-100)=-300$$

是指爸爸買了車票的話，共-300元。

與上面$-200-100=-300$(不夠 300 元買車票)相同結果。

計算上回到「負數−正數」的方式。

例如:$-42+(-3)=-42-3=-45$。

而最後是負數−負數的類型，我們可以想像甲和乙是兩個都欠人錢的傢伙，若甲欠得錢和乙欠的錢一樣多，則將兩人相減代表兩人實際身上的錢的差距，是一樣的，故會得到 0。若甲欠-1而乙欠-2，代表乙欠得比甲還多，則將甲−乙時，代表甲實際上比乙還多了 1 元。反之，若甲欠-2而乙欠-1，代表甲欠得比乙還多，則將甲−乙時，代表甲實際上比乙還少了 1 元。

例如: $-12-(-2)=-10$。　　例如: $-2-(-12)=10$。

因此，前人針對這些計算，整理了一套正負數的運算的結果，我們只要熟記規則後，對計算就很輕鬆。

口訣:

正正得正
正負得負
負正得負
負負得正

當我們計算中，計算符號「+ −」相遇時，可依照口訣的規律計算。

例:$20+(30)$，正數前原來有「+」號，在這個例子中，原來應該這麼寫:$(+20)+(+30)$，我們應該清楚地告訴其他人，20、30 是正還是負的，要將這兩者做加法的計算。但是，每個數都要寫上「+ −」會造成式子不易閱讀與計算過於繁雜，於是前人們決定，我們只特別強調「−」負的，只有負數才要寫出來，正數的「+」號可以直接省略。

在例子中我們可以看到 30 是正數，其前方原來有個「+」號，$20+(+30)$，我們要計算都要先把括號給去掉，「正正得正」，我們將括號去掉，兩個正號變成一個正號，變成$20+30=50$。

例: $25+(-30)$，例子中括號中是負數，前方計算是加號，我們知道「正負得負」，$25+(-30)=25-30=-5$。

例:$-(25)+30$，例子中括號中 25 是正數，前方計算是減號，我們知道「負正得負」，$-(25)+30=-25+30=5$。

例:$25-(-30)$，例子中括號中-30 是負數，前方計算是減號，我們知道「負負得正」，$25-(-30)=25+30=55$。

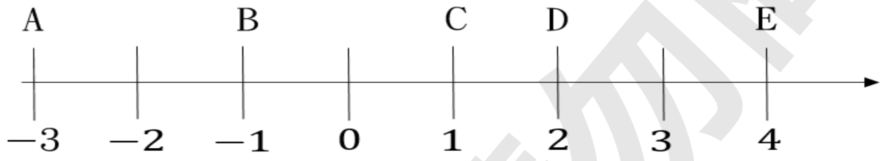
例如:$-(-50)=50$。

例如:$-\left(-(-50)\right)=-50$。

例如:$-\left(-\left(-(-50)\right)\right)=50$。

雖然我們熟記計算的口訣(法則)就能夠算出答案，但是背後的意義，還是要花時間多去思考。

下面我們會再用「數線」的角度，重新再看這些計算原則背後的意義。



如圖，數列中 C、D，$1+2$ 是什麼意思呢?

C 代表 1，代表與原點有 1 個單位長。而 D 代表 2，與原點有 2 個單位長。

今天將$C+D=1+2=3$，這個 3 是什麼呢? 與原點的 3 個單位長。

那$E-D$ 又是何意思呢? 將原點到 E 點的 4 個單位長減去了原點到 D 點的 2 個單位長，得到 2 個單位長度的差。

加入了負數後，$\overline{BC}$的長度，上個小節中我們知道可以以$|B-C|$表示，

$|B-C|=|-1-(1)|=|-1-1|=|-2|=2$。$\overline{BC}$ 的距離也的確是 2 個單位長。

(若我們在這只看$-1-1$，不看絕對值，在數線上的-1，代表往左移動 1 個單位，原本在-1的位置，再往左移動 1 個單位，來到-2。)

絕對值表示式中，我們可以將 B、C 兩點位置互換，意思也不會改變，$|C-B|=|1-(-1)|=|1+1|=2$。

(若我們也不看$|1-(-1)|$的絕對值，位置在 1 而向左-1的單位，是什麼意思? 在這裡的負，我們解釋為方向相反，向左後又再轉向，變成向右 1 個單位。於是，它從 1 的位置向右移動 1 個單位，變成在 2 的這個位置。)

再來，我們看看$\overline{AB}$ 的距離，$|A-B|=|-3-(-1)|=|-3+1|=|-2|=2$。

計算出正確的答案固然重要，但數字背後的意義，是需要時間去思考的，我們學習數學，行有餘力我們要去思考我們寫下的數字、符號，到底自己寫了什麼。

註:正、負數間的計算，務必熟練如正數的計算。

小試身手:

1.(1)$-17+4=($　　　$)$。

(2) $5-22=($　　　$)$。

(3) $1-2+3-4=($　　　$)$。

(4) $-7-(-12)=($　　　$)$。

(5) $1-(14-22)=($　　　$)$。

(6) $-17+(-9)=($　　　$)$。

2.(1)筆直的道路上，爸爸向左走了 120 公尺到了商店，接著向右走了 65 公尺到了藥鋪，商店與藥鋪距離(　　　)公尺；藥鋪與爸爸原來位置距離(　　　)公尺。

(2)在筆直的道路上，爸爸左邊 10 公尺有媽媽，爸爸的右邊 22 公尺有叔叔，爺爺在叔叔的右邊 6 公尺，則爸爸與爺爺的距離比媽媽與叔叔的距離多(　　　)公尺。

3.數線上有 A(-19)、B(3)、C(-4)與 D(7)

(1) $\overline{BC}$ =(　　　)。

(2) $\overline{AC}$ =(　　　)。

(3)A、B、C、D 四點任意連線的線段中，最長的是(　　　　)，共(　　　　)單位。

4.(1) $-353-(-14)=$(　　　　)。

(2) $127-333+42=$ (　　　　)。

(3) $|-325|+4-(-421)=$(　　　　)。

(4)$-(-(-17))+(-22)=$(　　　)。

d. 負整數的乘除計算、項的概念

在負數的乘法與除法中，我們一樣將其分類成:

(1)正數×正數 或是 正數÷正數

(2)正數×負數 或是 正數÷負數

(3)負數×正數 或是 負數÷正數

(4)負數×負數 或是 負數÷負數

◎第一種類型相信大家都很熟悉了。

◎第二、三種類型: 正數×負數 與 負數×正數 的情形，可以試想爸爸欠甲 10 元，欠乙 10 元、欠丙 10 元，則爸爸一共欠了 $10 \times 3 = 30$ 元。

則我們以式子表示: $(-10) \times 3 = -30$。

因此，將正數×負數(或負數×正數)的結果是負數的。

(國小學過的乘法是連加的概念，沿用也是正確的，$(-10) + (-10) + (-10) = -10 - 10 - 10 = -30$)

例: $20 \times (-4) = -80$。

例: $(-3) \times 12 = -36$。

而正數÷負數 與 負數÷正數 的情形，除法在過去所學中我們知道有「分」的概念，我們會有「什麼是將一個正數分出去給負數的想法呢?」，我們先試想「將一個負數分出去給正數」的情形，爸爸欠了 10 元，爺爺和奶奶幫爸爸還清這個欠款，則爺爺、奶奶則每人欠債主 5 元。我們以$(-10) \div 2 = -5$表示。

我們回過頭來檢視「將一個正數分出去給負數」，爸爸今天身上有 10 元，想分兩次將 10 元給兒子當零用錢，一次可以給兒子 5 元零用錢，爸爸的錢則每次減少 5 元，我們則以$10 \div (-2) = -5$

(國小學習的除法有連減的概念，在這裡我們這樣表述: $10 - 5 - 5 = 0$ 或$(-10) - (-5) - (-5) = -10 + 5 + 5 = 0$)

因此，正、負數相乘除時，結果也是負的。

例: $24 \div (-4) = -6$。

例: $(-28) \div 7 = -4$。

觀察上述中，我們發現乘、除法的計算，是可以先不管正負號，做完後再補上即可，但是原因是什麼還是要多思考。

◎第四種類型，負數×負數的類型，有 2 個人個人各欠爸爸 10 元，則爸爸原來該有多少錢呢? 我們思考一下，在爸爸的立場中，「$(-10) \times 2 = -20$」表示爸爸借出了 20 元，不能表示爸爸「真正原來」有的金額，2 個欠爸爸錢的應該以負數表示，「$(-10) \times (-2) = 20$」，爸爸應該要有 20 元才對。

若能理解這樣的關係，我們可以知道兩個負數相乘的結果，會變成正數。

例: $(-1) \times (-12) = 12$。

例: $(-4) \times (-8) = 32$。

而負數÷負數的類型，我們沿用之前的例子，爸爸欠了 10 元，爺爺和奶奶幫爸爸還清這個欠款，則爺爺、奶奶則每人欠債主 5 元。

之前的例子中，爺爺、奶奶欠了債主 5 元，

記作 $(-10) \div 2 = -5$。

但當我們換問，「爺爺、奶奶要替爸爸出多少錢」時，則我們記作$(-10) \div (-2) = 5$，爺爺和奶奶是要各出 5 元的。

當兩個負數相除時，結果卻是正數的。

例: $(-24) \div (-2) = 12$。

例: $(-18) \div (-3) = 6$。

當在做正負數的乘除法計算時，依然也是會有加減法的口訣，「正正得正、正負得負、負正得負、負負得正」，但是乘除法，我們不是用在去除括號，而是乘除法兩數相乘除時。

下個小節，我們將把加減乘除混在一起的四則運算，及介紹交換律、分配律、結合律等。在那之前，我們介紹一個「項」的概念，以前我們將一長串的式子切成好幾個部分，分別計算後再進行合併。

例如:$12 + 7 - 3 \times 5 + 1 =$? 我們知道先乘除後加減(沒括號時)，所以$3 \times 5$是要先算的，$\underline{12} + \underline{7} - \underline{3 \times 5} + \underline{1} = 12 + 7 - 15 + 1 = 19 - 15 + 1 = 4 + 1 = 5$。最後再依左計算至右方。

我們可以觀察上述有底線的地方，我們以「$+ -$」號，進行切割，將整個式子切成了四個部分，而這每一個部分，我們都稱「一項」，所以上述例子共有 4 項。

例如: $1 + 6 \times 5 \div 2 + 3 =?$ 共有 3 項。

例如: $20 - 3 \times 2 + 15 \div 3 - 1 =?$ 共有 4 項。

例如: $20 \times 3 \times 2 \div 4 - 3 \times 2 =?$ 共有 2 項。

若有出現括號時，代表它是優先計算，則我們一樣依照「+ −」號對式子進行分項的，而括弧內的都視作同一項，我們在括弧前後尋找加減號，進行分項。

例如: $(1+6)\times 5-2+(3\times 2)=?$ $\underline{(1+6)\times 5}-\underline{2}+\underline{(3\times 2)}$，共分成 3 項。

例如: $((5\times 5)+1)=?$ 則整個式子是 1 項(但是我們細部可以再分成兩小項)。

例如: $180\div(3+6)+(2\times 5-2)-1=?$ 則有 3 項。

透過分項的動作，可以條理分明的將複雜的計算簡易化，在正、負數計算上，也可以更有效率的計算出答案。

我們在敘述問題時，也會以項的概念表達，例如:我們會說將前兩項先加起來，「中間項(只有三項的話，則可分成前、中、後項)是 1」，「後面兩項先不動」等等，來表達計算上我們一些動作的概念。

(注意這裡說的項，是不含加減號的: 例如: $1+6\times 5\div 2+3=?$ 第一項:1，第二項是$6\times 5\div 2$，第三項:3)

因此，當人用「項」時，我們要知道他在說的意思。

小試身手:

1.(1) $72\times(-4)=($ $)$。

(2)$(-32)\div(-2)=($ $)$。

(3) $72\div(-4)=($ $)$。

(4)$(-125)\div 5=($ $)$。

(5) $(-21)\times(-3)=($ $)$。

2.(1)瓶子中剩下 50 毫升的洗手液，每個人一次按壓使用了 3 毫升的洗手液，若有 25 人需要洗手，則瓶子需要補(　　　)毫升洗手液。

(2)老師幫同學代墊(先付錢)買數學練習卷，若班上有 28 人，一份練習卷 40 元，則老師先付(　　　　)元。

3.在數線上，有 A(-11)、B(-3)、C(4)三點，

(1)則 $\overline{BC}$ 線段長的 3 倍是(　　　)單位長。

(2) $\overline{AC}$ 若以 3 個單位剪成一段，共可以剪成(　　　)段。

4.(1) $17 \times (-6) \div (-2) =$ (　　　)。

(2)$(-72) \times (-2) \div (-3) =$ (　　　　)。

(3) $600 \div (-4) \div 5 =$ (　　　　)。

(4) $2 \times (-4) \times 8 \times (-16) =$ (　　　　　)。

(5) $100 \div (-4) + \big(8 - (-16)\big) =?$ 式子中共有(　　　)項。

e. 整數的四則計算與應用

過去中，數學式子的計算優先中，我們學到過括號「( )」。也稱「小括弧(小括號)」，那麼在括號中若要再表示優先順序時，又該如何表述呢?

於是，「 中括號 [ ] 」、「 大括號 { } 」便衍生出來。

◎三種括號的優先順序分別是:

小括號最優先 → 中括號 → 大括號。

例如:$5-\{5+[(6-2)-3]\}=?$ 其中，小括號的「$6-2$」最優先計算，得到結果後其次是中括號中的「$(6-2)-3$」，最後優先是大括號，慢慢地將括號去除後，最後依照計算原則從左至右計算。

則$5-\{5+[(6-2)-3]\}=5-\{5+[4-3]\}=5-\{5+1\}=5-6=-1$。

註:「絕對值」若也出現，則它的優先順序如何呢? 有絕對值最優先處理，若絕對值內有其他括號，也依小括號→中括號→大括號順序處理。

◎交換律(commutative law)

假設 A、B 是二個整數，若滿足

$$A+B=B+A,$$

我們說 A、B 可以加法交換。

若滿足$A\times B=B\times A$，我們說 A、B 可以乘法交換。

與國小學正數同樣的，當式子計算符號只有加法或乘法時，彼此之間位置是可以互換的。

例如:$(-10)+(-5)$與$(-5)+(-10)$可以互換。

我們將其個別計算出結果:

$$(-10)+(-5)=-10-5=-15$$
$$(-5)+(-10)=-5-10=-15$$

但是，我們將上述展開時(去掉括號)，卻成了$-10-5$。注意這時變成了減號，是無法使用交換律的，一交換變成了$5-(-10)=15$。

再看一個比較長的例子:

$$(-1)+2+(-3)\text{與}(-1)+(-3)+2\text{ 與}(-3)+(-1)+2$$

$(-1)+2+(-3)=-1+2-3=-2$

$(-1)+(-3)+2=-1-3+2=-2$

$(-3)+(-1)+2=-3-1+2=-2$

另外三種不同位置，讀者可以試試，都是可以交換的。

若都是乘法時，一樣都會可以相互交換位置的交換律。

例如: $(-10)\times(-5)$與$(-5)\times(-10)$可以互換，計算出來的值都是 50。

例如: $(-1)\times(-2)\times 3$ 與$(-1)\times 3\times(-2)$與 $3\times(-1)\times(-3)$，六種位置互換計算出來的值都是 6。

◎結合律(law of association)

假設 A、B、C 是三個整數，若滿足

$$(A+B)+C=A+(B+C)，$$

我們說 A、B 有加法結合律。

若滿足$(A\times B)\times C=A\times(B\times C)$，我們說 A、B 有乘法結合律。

例如: $((-3)+199)+1=(-3)+(199+1)=-3+200=197$。

例如: $((-6)\times 33)\times 5=33\times\big((-6)\times 5\big)=33\times(-30)=-990$。

◎分配律(distributive law)

假設 A、B、C 是三個整數，若滿足

$$A \times (B + C) = A \times B + A \times C，$$

$$A \times (B - C) = A \times B - A \times C，$$

我們說 A、B 有分配律。

負數，當正數前方多了個「−」號就變成了負數，而這個「−」號，它除了有相反的概念外，它事實上，是正數乘上一個「−1」的概念。

例如:「3」與「−3」，當 $3 \times (-1) = -3$，彼此之間是一個「−1」倍的關係。

因此，例如:$3 \times (-5) = (-3) \times 5$，我們可以將負號在同一項相乘除的數之間自由地移動，那是為什麼呢?

因為，這個「−」號，是「−1」的意思，$3 \times (-5) = 3 \times 5 \times (-1) = -(3 \times 5) = (-3) \times 5$。都是乘法時，我們有交換律所以可以自由互換位置。

例如: $(-3) \times (2 + 5) = (-3) \times 2 + (-3) \times 5$

$$= -6 + (-15) = -6 - 15 = -21。$$

例如: $(-5) \times (100 - 1)$

$$= (-5) \times 100 - (-5) \times 1 = -500 + 5 = -495。$$

(若題目:求 -5×99)

分配律也不一定要全部都「分配」出去:

例如: $(-3) \times (2 + 5) = (-1) \times (3) \times (2 + 5) = (-1)(3 \times 2 + 3 \times 5)$，這個例子中我們將「−」保留了下來，而將 3 分配了出去。

例如: $(-12)\times(3+5)=(-4)\times(3)\times(3+5)=(-4)\times(3\times3+3\times5)$，這個例子中我們將$-12$拆成$-4$與$3$，保留了$-4$，而將 3 分配了進去。

◎逆分配律

分配律中，$A\times(B\pm C)=A\times B\pm A\times C$，若我們從「$A\times B\pm A\times C$」推得「$A\times(B\pm C)$」，則稱逆分配律。

在第一章，我們習慣把這個方法稱為「提」，在下面例子我們分別提了-9 和 -5，要多熟悉這個術語。

例如: $(-9)\times22+(-9)\times7=(-9)\times(22+7)=(-9)\times30=-270$。

例如: $103\times(-5)-3\times(-5)=(-5)\times(103-3)=-500$。

和分配律一樣，使用逆分配律時，只要是有共同的因數都可以提出來，也不一定要提兩邊最大的。

例如: $20\times(-5)-5\times(-5)=(-1)\times(20\times5-5\times5)$，在這個例子中，提出了$-5$中的「$-$」號，也就是$-1$。

例如: $20\times(-2)-5\times(-7)=$? 逆分配律，可以將這兩項合成一項嗎?

可以觀察到 20 和 5 有公因數 5，因此我們可以提出 5。

則 $20\times(-2)-5\times(-7)$

$=5\times\big(4\times(-2)-(1)\times(-7)\big)$

$=5\times(-8+7)=-5$。

一定要特別注意，提出後並不是就不見，如後項的 5 被提出後，仍會剩下「1」的存在。

補充:

在只有加、減法的一長串的式子中，若我們依照計算規則勢必非常繁瑣，等下加一項等下減一項，是非常容易產生計算錯誤的。

既然有加又有減的，為何我們不將全部都是「加」的匯聚在一起，全部「減」的都湊在一起呢? 然後再將這兩類加總起來，不是也可以得到相同的結果嗎? 根據這樣的想法，我們產生這樣處理這類的問題的方式。

例如:$(-3)+5-7+12-19+3$

在這個例子中，加號類的有「+5」、「+12」、「+3」，

而減號類的有「−3」、「−7」、「−19」。

則$(-3)+5-7+12-19+3$

$=(5+12+3)+(-3-7-19)=20+(-29)=-9$。

註:有括號要先計算時，是不能夠依照上述這樣處理的，必須要先將括號都拆除才行。例如: $(-1)+3-(-5)+(-7)$、$2-[\,4-(-6)+8\,]$，需要先把括號去掉。

小試身手:

1.(1) $15\times(-2)-3\times(-7)=($　　　　　$)$。

(2) $(-5)\times[\,2-5+(-7)\,]=($　　　　　$)$。

(3) $(-2)+(-2)-3\times3+(-4)\div4=($　　　　　$)$。

(4) $15-\{\,4-[\,(-4)\times2+1\,]\,\}=($　　　　　$)$。

(5) $429\div[\,(-3)+2\times(-4)\,]=($　　　　　$)$。

2.請利用交換律、結合律、分配律計算下列結果:

(1) $(-15)\times998=($　　　　　$)$。

(2) $998 + ((-25) + 2) = ($　　　　　$)$。

(3) $35 \times (-7) - 15 \times (-7) = ($　　　　　$)$。

(4) $11 \times (-2) \times (-3) \times 3 \times (-50) = ($　　　　　$)$。

3.(1)爸爸買了手機 20000 元、耳機 3500 元、充電線 300 元、行動電源 5200 元，爸爸先以現金付了 5000 元後，剩下不夠的部分以每個月 3000 元分期還給老闆，需要(　　)個月才能還清欠款。

(2)「-4、-8、3、-1、0」，若在五數中選出三個數相乘。

最大值是(　　　　)，最小值是(　　　)。

4.(1) $1 + 2 - 3 \times 4 + 5 - 6 \times 7 + 8 - 9 \times 10 = ($　　　　　$)$。

(2) $[\,(-1) \times 2 - (-3) \times 4\,] \div (5 - 6) \times (-2) + 7 = ($　　　　　$)$。

(3) $199 \times (-3) - 398 \times (-6) + 199 = ($　　　　　$)$。

(4)哥哥玩 16 次抽抽樂，每一抽 99 元，共抽到「一個 B 獎、一個 C 獎、四個 D 獎、七個 F 獎、二個 G 獎」。各種獎品的市場價值如下表，則哥哥(　　)了(　　　)元。(前括號請填賺或是虧，後括號請填價錢。)

獎項	A 獎	B 獎	C 獎	D 獎	E 獎	F 獎	G 獎
市價	5000 元	600 元	500 元	396 元	88 元	50 元	10 元

單元練習(Exercise for section 11)

§11.1 (a)若以 45 公斤爲基準，48 公斤記作+6，則 39 公斤記作(　　　)。

(b)某次考試以 80 分爲基準，甲考 78 分記作−4，乙考(　　　)分記作+8，丙考(　　　)分記作−16，甲乙丙的平均分數記作(　　　)。

§11.2 一數線上 A、B 兩點距離是 6 單位，A 表示的位置是 3。

若 B 在 A 的右邊，則 B 表示的數字是(　　　)。

若 B 在 A 的左邊，則 B 表示的數字是(　　　)。

§11.3 是非題

(a)(　　)絕對值出來的數越大，其原來數字越大。

(b)(　　)絕對值$|-9|$，意思是數線上 0 和 9 的距離，也可以是 0 和−9的距離。

(c)(　　)正數越大，其絕對值越大。負數越小，其絕對值越小。

(d)(　　)絕對值小於 5 的整數有 5 個。

(e)(　　)0 的絕對值還是 0，但$|甲| = 0$，甲可能不一定爲 0。

§ 11.4 (a)$|-5|+|2-3|-|7-3|=($ $)$。

(b)一數線上有 A(-5)、B(7)、C(12)三點，則$\overline{AB}=($ $)$單位長，$\overline{AC}=($ $)$單位長。

§ 11.5 (a)$(-5+12)+(-22)=($ $)$。

(b)$3-(-5)+(45)=($ $)$。

(c)$(-5)-(-6)-(-7)-\cdots-(-11)=($ $)$。

(d)若甲數減去乙數後是正數，則下列條件可能發生的有( )。

(1)甲是負數、乙是正數 (2)甲是負數、乙是負數

(3)甲是正數、乙是負數 (4)甲比乙小。

§ 11.6 (a)$(-3)\times(-72)\div(-2)=($ $)$。

(b) $(-324)\div 4\div(-3)=($ $)$。

(c) $(-72)\div[\,(-39)\div 13\,]=($ $)$。

(d)下列敘述，正確的有( )。

(1)0 除上負數還是 0，任何負數除上 0 還是 0。

(2)最大的正整數是 1。

(3)最小的負整數是-1。

(4)若甲數和乙數相乘是負數，則甲數和乙數相除也必是負數。

§11.7 請利用交換律、結合律、分配律計算下列問題:

(a) $(-2) \times 19 + 54 \times (-2) + (-2) \times 7 =$ (　　　　　)。

(b) $50 \times [\,(-244) \times 12\,] =$ (　　　　　　)。

(c) $(-7) \times [\,(-1) + 300)\,] =$ (　　　　　　)。

(d) $(-9) \times 31 - (-18) \times 9 - (-9) \times 113 =$ (　　　　　)。

§11.8 (a)中央氣象局發布寒流警報，明日起氣溫會連續七天減少2℃，若今 天氣溫是13℃，明日算起第七天的氣溫是(　　　　　) ℃。

(b)零件工廠計畫 7/1 日起一個月內每天要生產 160 個零件，7/1 日多生產了 11 個零件，7/2 至 7/12 日每天都多生產了 8 個零件，7/13 至 7/18 一台生產機台故障，少生產 20 個零件，7/19 至 7/20 電力公司電力維修，沒有零件生產。則工廠 7/21 至 7/31 平均每天要多生產(　　　　　)個零件才能趕上計畫。

§11.9☆ A submarine was situated 272 feet below sea level.If it ascends 4 feet per minute,what will be its new position after one hour?

§11.10☆ In the dice game,the player takes turns to roll a dice 15 times.

event	1	2	3	4	5	6
payoff	-2	-1	0	1	2	3

The score is the sum of the payoff.

(The payoff of it landing on each side in the table.)

The dice recording in the table below.

event	1	2	3	4	5	6
Frequency	7	1	3	1	1	2

What's the final score in the table?

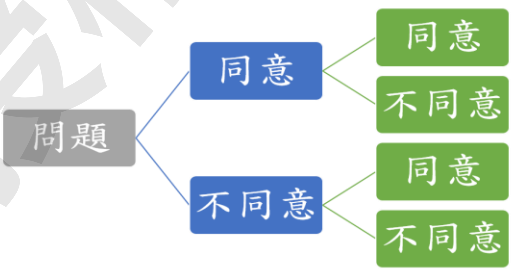
第 12 章 指數記數法

我們以「阿拉伯數字」來記述「數字」，前人也會以「結草」、「正字」方式來記述數字。過去中，若「得到了 100 元、50 元、8 元，共得到多少錢?」，我們會寫成式子「$100+50+8$」來表示這句話。加法中有了「連加」的出現，乘法便產生了。當乘法也出現「連乘」時，例如:$2\times2\times2\times2$、$5\times5\times5$、$11\times11\times11\times11$等等，當我們有非常多次的倍數增加時，例如:將一張矩形紙張對折後，紙張上產生 2 個矩形，若再對折，攤開後會產生 4 個矩形，若再第三次對折後，攤開後便有 8 個矩形。

因此，我們知道對折第四次時，會有$2\times2\times2\times2=16$個矩形。隨著不停的對折下去，矩形數便是不停地以 2 倍增加。

又例如:問卷調查上，有同意、不同意二個選項，第一題有二種選擇，第二題也有二種選擇，共有 4 種選擇。若再增加第三題，則共有 8 種選擇。

(例如:第一題:同意 第二題:同意 第三題:同意)



同樣的問題，若選項增加成 5 個選項，則會有$5\times5\times5\times\cdots$種選擇。

又例如:我們將一個物體不斷地縮小 2 倍，即$\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\cdots$。

我們將這種相同數字，反覆的連乘在一起，我們以「乘方」的表示法，來代表連乘的意義。

例如:有 5 個 2 相乘，$2\times2\times2\times2\times2$，以$2^5$表示。數字 2 以正常大小書寫，而將連乘 5 次的次數 5 以較小的字體，寫在數字 2 的右上角。

而數字 2 叫它底數，而數字 5 稱呼它是指數或是 5 次方。

讀作:「二的五次方。」

指數 或 次方

$$2^5 = 2\times2\times2\times2\times2$$

底數

exponent or power

$$2^5 = 2\times2\times2\times2\times2$$

base number

例如:「四的六次方」，則表示4^6，則是$4\times4\times4\times4\times4\times4$的意思。

註:若以英文表述乘方的概念，power 有部分人指得是整個乘方的表示，也有部分人指得是指數的部分，但是在表述數學式上的法說比較統一的。

我們同樣以「二的五次方為例」，則以 two to the power of five 或 two to the fifth (power) 表示。而$2\times2\times2\times2\times2$ 的連乘，則會說 2 times itself 5 times。

在這個章節中，將探討「連乘」的表示法。

a. 整數的乘方

在國中階段，我們以學習整數的乘方為主。先單純來看正數的部分，當指數是 2 時，我們習慣稱「平方(square)」，

例如:「2 的平方，指2^2。」、「5 的平方，指5^2(five squared)。」。

而指數是 3 時，我們習慣稱「立方(cube)」，

例如:「2 的立方，指2^3。」、「6 的立方，指6^3(six cube)。」。

當指數超過 3 以後，則會以「次方」稱呼，

例如: 「2 的四次方，指2^4。」。

一般我們正整數，「1、2、3…」它們又是幾次方呢?我們可以將它們看成只有自己一個相乘，例如:2，我們稱它是「二的一次方，$2^1 = 2$。」。一次方的話，我們常將其「1」省略。

◎正數中有個特別的數字「1」，1 的任何次方都是 1，

$$1^n = 1 \times 1 \times \cdots \times 1，$$

當今天指數 n 無論多少數字，結果依然是 1。

◎那麼，「0」呢? 和 1 一樣，0 的任何次方都是 0，

$$0^n = 0 \times 0 \times \cdots \times 0，$$

當今天指數 n 無論多少數字，結果依然是 0。

那麼，當指數是 0 時，例如:2^0 、4^0 …，當零次方時，(底數有但是指數卻是 0) 則會是多少呢?

在這之前我們先觀察一個例子，

$2^1 = 2$，$2^2 = 4$，$2^3 = 8$，$2^4 = 16$，$2^5 = 32\cdots$

$3^1 = 3$，$3^2 = 9$，$3^3 = 27$，$3^4 = 81$，$3^5 = 243\cdots$

$5^1 = 5$，$5^2 = 25$，$5^3 = 125$，$5^4 = 625\cdots$

我們可以發現，當指數往後+1時，都是多一倍的增加，而當指數往前−1時，則會少一倍，也因此我們可以發現，「任何正整數的零次方都是 1」。

例如: $2^1 = 2$，則 2 的零次方則再除上 2，即$2^0 = 1$。

例如: $3^1 = 3$，則 3 的零次方則再除上 3，即$3^0 = 1$。

例如: $5^1 = 5$，則 5 的零次方則再除上 5，即$5^0 = 1$。

所以，很多人都會認為零次方應該要是 0 吧，這是不對的呢!

上述所提的是「正整數」，那「0」呢? 0^0，零的零次方，又是什麼呢?

上面我們得到零次方的方法，是用一次方往前除上底數，但是在零次方時除數變成了 0，變成了 $\frac{0}{0}$ 的情形，我們知道除法定義上規定，不可以零除(分母不得為零)，所以0^0 我們將說它無意義，或是說它沒有定義。

註:在整數分類中，整數可以分成「負整數」、「0」、「正整數」，0 不算在正、負整數中。

註:正整數，也可以稱「自然數」。

◎我們前面交代了整個正整數及 0 的乘方，接下來介紹負整數的乘方。

負整數的乘方和正整數的乘方基本上都是一樣的，

例如: $(-2)^4 = (-2) \times (-2) \times (-2) \times (-2)$，4 個$-2$相乘，

讀作「負二的四次方」。

但是括號一定要記得加上，若我們去掉括號變成-2^4，則它的意思變成「負的二的四次方」，即$-2^4 = -2 \times 2 \times 2 \times 2 = -16$ 它與$(-2)^4 = 16$ 是不同的意思。負整數的乘方中指數的奇數、偶數影響最後的值是正數還是負數。

例如: $(-2)^1 = -2$。

$(-2)^2 = (-2) \times (-2) = 4$。

$(-2)^3 = (-2) \times (-2) \times (-2) = -8$。

$(-2)^4 = (-2) \times (-2) \times (-2) \times (-2) = 16$。

$(-2)^5 = (-2) \times (-2) \times (-2) \times (-2) \times (-2) = -32$。

可以觀察負整數乘方當指數是非 0 的偶數時，會是正數。當指數是非 0 的奇數時，則是負數。

我們檢查最大正負整數-1:

$(-1)^1 = -1$。

$(-1)^2 = (-1) \times (-1) = 1$。

$(-1)^3 = (-1) \times (-1) \times (-1) = -1$。

$(-1)^4 = (-1) \times (-1) \times (-1) \times (-1) = 1$。

也是有遵循這個規則，於是我們開始討論負整數的「零次方」。

以上面兩個負整數例子來思考，我們可以發現乘方的值都會有一個「+、－、+、－」的規則，而且和正整數一樣都是底數間的倍數關係。

我們可以知道$(-2)^0$是個正數，且將$(-2)^1 = -2$ 除上-2，發現$(-2)^0 = 1$。

且觀察-1的乘方後，$(-1)^0 = 1$。

因此，我們有最後的結論:任何非 0 整數的零次方皆為 1。

小試身手:

1.請計算下列乘方結果:

(1)3^6 =(　　　　)，6^3 =(　　　　)。

(2) 8^2 =(　　　　)，2^8 =(　　　　)。

(3) $(-5)^3$ =(　　　　)，-4^3 =(　　　　)。

(4) $3^0 + 3^2 - 2^1 - (-2)^5$ =(　　　　)。

2.請依題意以乘方表示:

(1)有五個大箱子，每個大箱子中有 5 個中箱子，每個中箱子中有 5 個小箱子，則共有(　　　　)個箱子。

(2)有一棵桃樹，它向外長了 7 根大樹枝，每枝大樹枝又各向外伸展 7 枝小樹枝，每枝小樹枝各長了 7 顆桃子，則這顆果樹共可收成(　　　　)顆桃子。

3.在-3^5、4^7、$(-4)^7$、$(-3)^4$、$(-5)^8$中，最大的是(　　　　)，最小的是(　　　　)。

4.請計算下列結果:

(1) $2^{10}=$(　　　　)。

(2) $2^4\times 2^6=$(　　　　)。

(3) $2^5\times 2^5=$(　　　　)。

(4) $2^3\times 2^7=$(　　　　)。

b. 十進位表示式(base ten notation)

在國小時，我們曾學過十進位的表示法。

例如:23569。

則十進位表示成$2\times 10000+3\times 1000+5\times 100+6\times 10+9$。

若是小數0.652，則可以表示$6\times 0.1+5\times 0.01+2\times 0.001$。

當我可以使用乘方來簡化十進位表示，$10^1=10$、$10^2=100$、$10^3=1000$、$10^4=10000$，則上述例子則可以簡化成:

$$2\times 10^4+3\times 10^3+5\times 10^2+6\times 10+9。$$

同時也有一個問題，小數的十進位表示怎麼辦呢?

乘方的指數在前面，最小就到 0。事實上，還是能繼續除下去。

例如: $10^0 = 1$，若在將 $1 \div 10 = \frac{1}{10}$，

也可以繼續下去⋯ $\frac{1}{10} \div 10 = \frac{1}{100}$，

於是前人用指數為負數訂下 $10^{-1} = \frac{1}{10}$，$10^{-2} = \frac{1}{100} \cdots$。

同時，我們也發現: $2^{-1} = \frac{1}{2}$、$3^{-1} = \frac{1}{3}$，

若非 0 的整數 a，則$a^{-1} = \frac{1}{a}$。

同時也檢查10^{-2}，指數$-2 = 2 \times (-1)$，因此$10^{-2} = 10^{2\times(-1)}$，將$10^2$看作一個個體，$(10^2)^{-1} = \frac{1}{10^2} = \frac{1}{100}$。因此前人這樣用指數為負數的安排是不會有衝突的。

我們重新整理這部分:

若有一非 0 整數 a，則$a^{-1} = \frac{1}{a}$。

若有一非 0 整數 a，與一正數 n，則$a^{-n} = \frac{1}{(a)^n}$。

正數上是比較明白的，請看下列一些例子。

例如:$3^{-1} = \frac{1}{3}$、$4^{-2} = \frac{1}{4^2} = \frac{1}{16}$。

負數在指數是負數的情況下會有正負號問題:

例如:$(-2)^{-1} = \frac{1}{(-2)} = -\frac{1}{2}$。

例如:$(-2)^{-2} = \frac{1}{(-2)^3} = \frac{1}{4}$。 在這裡分母的$(-2) \times (-2) = 4$ 變成正數了。

例如:$(-2)^{-3} = \frac{1}{(-2)^3} = \frac{1}{-8} = -\frac{1}{8}$。

我們繼續回到一開始的例子小數0.652中，則可以表示$6\times 0.1+5\times 0.01+2\times 0.001$，則可以表示成

$$6\times 10^{-1}+5\times 10^{-2}+2\times 10^{-3}$$

若以十進位表示式可以進行計算嗎? 是可以的，像是加減法是容易進行的。

我們可以使用逆分配律，將 10 的次方提出後合併。

例如:$215+123=?\quad 215=2\times 10^2+10+5$

$$123=1\times 10^2+2\times 10+3$$

我們知道最終結果為:$215+123=338$。

$$2\times 10^2+10+5+1\times 10^2+2\times 10+3$$

$=2\times 10^2+1\times 10^2+10+2\times 10+5+3$ 都是加法下使用交換律交換位置

$=(2+1)\times 10^2+(1+2)\times 10+(5+3)$

$=3\times 10^2+3\times 10+8$

乘除部分，日後將學習指數的計算後會再次學習。

十進位表示式實際主要用在 Big Number(非常大、小的數)上，日常生活中我們常聽到最大的數，像是世界人口 78 億，最小我們說毫米大小的米粒。而遠超這大小數字，在科學的計算上用到十進位表示法。例如:太陽外離我們最近的一顆恆星是半人馬座的比鄰星，距離地球 4.246 光年，而 1 光年(光的速度行走一年的距離)約為 9.4605284×10^{12}公里。

例如:台灣 2 奈米晶片製程發展，1 奈米為10^{-7}公分。

有更多的應用，需要更多數學知識建立後，在物理、化學、生物、資訊、天文、海洋、工程等應用中漸漸看見它們重要性。

我們可以想像這麼龐大的數字不容易寫在紙上計算，也不是一台計算機可以計算的，但是透過指數的表示法，我們透過四捨五入、無條件進位等方法進行計算所產生誤差的量，透過這種表示法，可以清楚掌握我們做了什麼。

小試身手:

1.請將下列數轉換爲十進位表示式(請以 10 的次方呈現):

(1)23503 = (　　　　　　　　　　　　　　　　　　)。

(2)0.3257 = (　　　　　　　　　　　　　　　　　　)。

(3)120 萬= (　　　　　　　　　　　　　　　　　　)。

(4)6325 億= (　　　　　　　　　　　　　　　　　　)。

2.請將下列十進位表示式還原爲原來的數:

(1) $8 \times 10^{-1} + 2 \times 10^{-2} + 5 \times 10^{-4}$ = (　　　　　　　　)。

(2) $3 + 1 \times 10^{-1} + 4 \times 10^{-2} + 1 \times 10^{-3} + 5 \times 10^{-4} + 9 \times 10^{-5}$ = (　　　　　　　　)。

(3)$6 \times 10^{2} + 5 \times 10 + 5 \times 10^{-2}$ =(　　　　　　　　)。

3.(1)10^{4} 展開後共有(　　　)個零，10^{15} 展開後共有(　　　)個零。

(2) 10^{-3} 小數點後共有(　　　)個零，10^{-5} 小數點後共有(　　　)個零，10^{-12} 小數點後共有(　　　)個零。

4.「七百八十九億六千五百四十三萬五千六百七十九」，以十進位表示式(請以 10 的次方呈現)爲(　　　　　　　　　　　　　　　　　　)。

c. 10 的指數式的轉換

我們知 10 的次方間，當指數增加 1 也就是增加 10 倍，當指數減 1 也就是少了 10 倍，我們時常彼此是以不同的次方呈現，例如: 5×10^{-2}與 5×10^{3}。在直觀上，不容易判別兩個之間的倍數關係，而這個 10 的指數表示，可以想像就是單位一樣，不同的單位不容易呈現兩者之間的關係，因此我們嘗試讓兩者變同個「單位」。

$5 \times 10^{3} = 5 \times 1000$ 接著將後方的 1000，拆成10×100。

$= (5 \times 10) \times 100$ 都是乘法，使用結合律將 5 和 10 合併。

$= 50 \times 100 = 50 \times 10^{2}$ 在這裡我們可以看出些端倪，

當指數減少 1 時，前方的數便會增加 10 倍。

$$= 500 \times 10^{1} = 5000 \times 10^{0} = 50000 \times 10^{-1} = 500000 \times 10^{-2}$$

我們可以發現它是5×10^{-2} 十萬倍的關係。

反過來，我們將5×10^{-2}漸漸推導成和 5×10^{3}同樣都是「10^{3}」

$5 \times 10^{-2} = 5 \times \frac{1}{100}$ 我要指數是 10^{-1}的話，則「一百分之一」就要讓它變成「十分之一」，因此我們同時乘上 $\frac{1}{10}$ 與 10。(即乘上 1，不影響)

$= 5 \times \frac{1}{100} \times 10 \times \frac{1}{10}$ 我們只要$\frac{1}{10}$，其他都和前面合併。

$$= \left(5 \times \frac{1}{100} \times 10\right) \times \frac{1}{10} = \left(5 \times \frac{1}{10}\right) \times \frac{1}{10} = 0.5 \times \frac{1}{10} = 0.5 \times 10^{-1}$$

同樣地我們也可以觀察，當指數增加 1 時，前方的數便會減少$\frac{1}{10}$ 。

$$= 0.05 \times 10^{0} = 0.005 \times 10^{1} = 0.0005 \times 10^{2} = 0.00005 \times 10^{3}$$

所以它是 5×10^{3}的 $\frac{1}{100000}$ 十萬分之倍。

這邊概念是容易的，但是計算上非常容易出錯，計算上務必要非常小心。

小試身手:

1.請將下列 10 的指數表示式依題意轉換:

(1) $6.2 \times 10^3 = (\qquad) \times 10^4$。

(2) $9 \times 10^{-4} = (\qquad) \times 10^{-3}$。

(3) $1.32 \times 10^5 = (\qquad) \times 10^1$。

2.請將下列 10 的指數表示式依題意轉換:

(1) $3.4 \times 10^2 = 3400 \times 10^{(\qquad)}$。

(2) $5.9 \times 10^{-4} = 0.059 \times 10^{(\qquad)}$。

(3) $0.32 \times 10^5 = 32 \times 10^{(\qquad)}$。

3.(1) 4×10^{-1} 是 4×10^1 的(　　)倍。(請以分數表示)

(2) 5×10^4 是 5×10^2 的(　　)倍。

(3) 1.1×10^{-1} 是 11×10^{-2} 的(　　)倍。

4.(1) 4×10^{-1} 的 1000 倍是 $4 \times (\qquad)$。

(2) 3.2×10^2 的 100 倍是 $3.2 \times (\qquad)$。

(3) 1.4×10^{-1} 的 0.1 倍是 $1.4 \times (\qquad)$。

d. 科學記號

在各種 10 的指數表示式，大家制定出了一個「公版」的規格，由於當時這些 Big Number，都只存在科學研究之間，於是它這個「公版」規格，後來被稱為「科學記號表示法」，簡稱科學記號(或稱科學記法)(scientific notation)。

科學記法事實上也是很多種版本，像是打開計算機或是電腦上文書軟體(例如: Microsoft excel)，當我們輸入的位數(或計算結果)

大過於硬體可以存放的空間時，如果不是跳出錯誤(可能顯示為-E-或是 error)。它便會以科學記法呈現你所輸入的數，例如:輸入 1234567890123，則以 1.23457E+12 表示，它的意思則是 1.23457×10^{12}。

在電腦科學中，存在更多種記數的方法，例如:使用電腦繪圖調色時你會看到「#999FF」、在硬碟中的資料顯示「00000010 0100 0101 0000」或是在網路 IP(地址)上看過類似「2020:0bd8:000c:1d20:0000:0000:0000:0001」，都是使用不同的數字記法。

現今廣泛使用的科學記號法，在古希臘阿基米德(Archimedes)已經開始使用 10 的指數表示法，一直至西元 1963 年，美國科學資訊部研究所創刊 SCI(Science citation index)，(它收錄全世界出版各種自然學科的核心期刊論文)，世界科學研究的「數字表示法」最終演變以下介紹的「科學記號表示法」為目前全世界都在使用。

只要滿足下列規定的數字表示，若它是$\boxed{\text{正數}}$，

「$a \times 10^b$」 其中 a 需要介於 1 與 10 之間(即$1 \leq a < 10$)，

且 b 需要是整數(正、負整數或 0)，

我們稱呼它是科學記號表示法。

若它是$\boxed{\text{負數}}$，a 需要介於-1與-10之間(即$-1 \leq a < -10$) ，

且 b 需要是整數。

例如:3.1×10^2、4、9.9×10^{-1}、-1.01×10^2 都是科學記號表示法。

或許會有讀者認為，不統一科學記號表示法也沒關係吧? 但是我們可以設想一個國家使用的數學表達是「十八兆、三千五百二十億」都用該國國字，一種國家用「6×2^2、3.3×2^{12}」專用 2 的指數表示法，一國又使用 7 的指數表示法，那麼世界各地的人都會非難困難地交流數學。

不同的科學記號表示法，如何比較大小呢? 我們就可以利用上小節中，透過 10 的指數的轉換，去進行大小的比較。

若是分數，能否轉換成科學記號呢? 我們可以將分數先轉換成小數，再轉換成科學記號。例如: $\frac{1}{4} = 0.25 = 2.5 \times 10^{-1}$。

我們可以發現，分數是不能全都轉換成小數的，例如: $\frac{1}{3}$，因此科學記號是不能表示所有的數的。

小試身手:

1.下列何者不是科學記號? (　　　　　　　　　　　　　)。

(1) -1.21×10^0　(2) 10.2×10^3　(3) 5×2^3　(4) $\frac{3}{10} \times 10^{-6}$

(5) $3.5 \times 10^{\frac{1}{2}}$　(6) -9.01×10^{12}　(7) 0.6×10^{-5}

2.請以科學記號表示下列各數:

(1) $34000 \times 10^2 =$ (　　　　　　　　　　)。

(2)十萬分之一= (　　　　　　　　　　)。

(3) $-0.02 \times 10^{-1} =$ (　　　　　　　　　　)。

3.請將下列分數轉換爲科學記號:

(1) $\frac{1}{50} =$(　　　　　　　　　　)。

(2) $\frac{1}{8}=($ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $)$。

(3) $\frac{2}{25}=($ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $)$。

4.請比較下列大小關係，請在括號中填入(> 、 < 或 =)。

(1) -3.1×10^{-2} ($\qquad$) -3.03×10^{-3}。

(2) 5.01×10^{2}($\qquad$)1.5×10^{3}。

(3) -1.7×10^{-10}($\qquad$)-1.7×10^{-11}。

e. 指數記數法下的大小關係

若我們是在科學記號下，要比較兩數之間的大小關係是容易的，當我們的乘方不是科學記號時，又該如何判別誰大誰小呢?

例如:7×3^{5}與8×5^{3} 又是誰大誰小呢?

我們簡單將這個問題進行分類，將$a\times b^{c}$分成前面的乘數 a 與後面的乘方的底數 b 與指數 c，可以分成:

(1)兩數間指數不同、底數相同 (2)兩數間指數相同、底數不同

(3)兩數間指數、底數都不同。

當我們遇到兩個以指數記數的數，它可能不是乘方的狀態、也不是科學記號那樣的精簡，它也不容易化成科學記號，我們可以利用下列方法的概念，進行數的大小的比較。我們透過想辦法讓兩數的底數有沒有機會一樣，再進行比較。沒有的話，讓兩數的指數能不能讓它一樣。當未來要進行兩數的判別大小，可以透過這些類型比較大小的技巧，系統性的分析兩數大小關係。

註:指數記法化成科學記號，很多情況不是那樣地容易，例如:$7\times2^{50}=$ ($\,$)$\times10^{(\ )}$ 它是不容易轉換的，2 的 50 次方非常的大，無法輕易計算得出更何況再轉成科學記號。

◎第一種類型:(指數不同，底數相同)

兩乘方數，若兩者底數相同情況下，則指數越多，則該數會越大，例如:2 的 7 次方比 2 的 6 的次方還大。

例如:7×3^5與7×3^6 前方乘數一樣，底數相同，指數越大則該數越大。 (所以後面7×3^6是比前面7×3^5還大的。)

例如: 700×5^6 與25×5^8 在這個例子中，前方乘數是不同，後方底數相同。

我們嘗試將指數和底數都讓一樣，比較前方的乘數。因為5^8比5^6還大，因此我們從後面進行調整，正數比小數好計算一些，當然也可以從500×5^6去做。

$$25\times5^8=(25\times5\times5)\times(5\times5\times5\times5\times5\times5)$$

將5^8展開，保留5^6部分

$$=(25\times5\times5)\times5^6$$

剩下的往前方乘數合併

$$=625\times5^6$$

因此，我們知道 700×5^6 是比 25×5^8 還大

◎第二類型:(指數相同，底數不同)

兩乘方數，若兩者指數相同情況下，則底數越大，則該數會越大，例如:10 的 3 次方比 2 的 3 的次方還大。

例如: 4×3^4與4×5^4

前者是$4\times3\times3\times3\times3$

後者是$4\times5\times5\times5\times5$，所以後者是比前者大的。

例如: 130×5^6 與2×10^6

在這個例子，或許有些讀者直覺會有後者感覺是比較大的，這個例子中兩者除了指數一樣外，其他部分是不太一樣的。碰到這類問題時，我們一樣嘗試將乘方的部分都讓兩者都變成5^6。

因此，我們嘗試去調整2×10^6。

$2 \times 10^6 = 2 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10$

我們知道 10 又可以拆成2×5。

$= 2 \times (2 \times 5) \times (2 \times 5) \times (2 \times 5) \times (2 \times 5) \times (2 \times 5) \times (2 \times 5)$

$= (2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2) \times (5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5)$

都是乘法時，有交換律和結合律可以自由地變換位置。

$= 2^7 \times 5^6$　　又再次換回乘方後，接著我們比較前方所乘的數的大小

$= 128 \times 5^6$　　我們發現130×5^6是比較大的，故$130 \times 5^6 > 2 \times 10^6$。

由這兩類問題我們可以知道，面對兩者數的大小關係，若前方的乘數一樣，後方的指數或底數其中一項一樣(如兩類中第一個例子)，我們可以容易比較出大小。倘若前方的乘數兩者是不同的情況下，只有後面的乘方的指數或底數其中一項相同，我們可以調整後面乘方的部分，嘗試將兩者的指數或是底數讓它們一致後，再比較前方乘數的大小。

◎第三類型:(指數不同，底數不同)

若遇到最壞的情況，前方的乘數與後方的指數與底數全部都不同。若兩數之間，三個數字中，或許有些倍數關係的話，可以嘗試用上面兩種方法去做。

例如: 9×4^3 與2×6^4 我們可以觀察後面的底數 4 和 6 有最大公因數 2，我們可以嘗試讓兩個數後方都固定是2^3。

$$\begin{aligned}9\times4^3&=9\times4\times4\times4\\&=9\times(2\times2)\times(2\times2)\times(2\times2)\\&=(9\times2\times2\times2)\times(2\times2\times2)\\&=72\times2^3\end{aligned}$$

另一方面:

$$\begin{aligned}2\times6^4&=2\times6\times6\times6\times6\\&=2\times(2\times3)\times(2\times3)\times(2\times3)\times(2\times3)\\&=2\times2\times2\times2\times2\times3\times3\times3\times3\\&=(2\times2\times2)\times(2\times2\times3\times3\times3\times3)\end{aligned}$$

$=2^3\times324$於是我們知道9×4^3 比 2×6^4還小。

倘若眞的兩數找不到因倍數的關係，我們嘗試將兩數相除。若有甲、乙兩數，我們可以將 $\frac{甲}{乙}$ ，若得到 1，則甲和乙是一樣大。若得到的比值比 1 還小，則乙數比甲數還大。若得到比值大於 1，則甲數比乙數還大。

例如: 3×7^5 與 8×6^4 我們嘗試將兩數相除，確認比值。

$$\frac{3\times7^5}{8\times6^4}=\frac{3\times7\times7\times7\times7\times7}{8\times6\times6\times6\times6}$$

我們發現分子上面有 6 個數相乘，而分母只有 5 個數相乘。

比 1 大的分數乘上比 1 大的分數，會依然得到比 1 大的分數。例:$\frac{3}{2}\times\frac{3}{2}=\frac{9}{4}$。

比 1 小的分數乘上比 1 小的分數，依然會得到比 1 還小的分數。例:$\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$。

但是一數比 1 大，一數比 1 小，兩數相乘結果是不一定的。例:$\frac{5}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{5}{4}$；$\frac{3}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{3}{4}$。

我們可以將$\frac{3\times7\times7\times7\times7\times7}{8\times6\times6\times6\times6}$拆成多個同樣都是比 1 大或是比 1 小的分數相乘。那樣地話，我們可以保證比值是大於或是小於 1。

則我們觀察我們可以分出很 4 個 $\frac{7}{6}$ 與 $\frac{3\times7}{8}$ 。

則 $\frac{3\times7^5}{8\times6^4}=\frac{3\times7\times7\times7\times7\times7}{8\times6\times6\times6\times6}=\frac{3\times7}{8}\times\frac{7}{6}\times\frac{7}{6}\times\frac{7}{6}\times\frac{7}{6}$ 每一個分數都是比 1 還大。

故我們知道$\frac{3\times7^5}{8\times6^4}$的比值比 1 還大，

所以 分子的3×7^5 是比分母的 8×6^4還大。

雖然我們並沒有求得眞正的值，但我們可以以估計的方法去判別兩者大小關係。

(若兩數都是負數時，例如: $\frac{\text{甲}}{\text{乙}}=\frac{-1}{-2}=\frac{1}{2}<1$，若照我們上面的判定，甲<乙，顯然是不對的。特別注意是負數在比較大小時，其結果是相反的。)

我們順勢介紹指數記法、科學記號的加減乘除的計算:

加減法，我們前面有提及，可以用逆結合律將兩數合併。

例如: $5\times3^5+2\times3^6$ 我們發現兩項間，大家都有3^5，於是我們提出3^5。

$=5\times3^5+2\times3\times3^5$

$=3^5\times(5+2\times3)$

$=3^5\times11$

例如: $8\times10^{-1}-4\times10^{-2}$ 我們共同提出10^{-2}。

$=8\times10\times10^{-2}-4\times10^{-2}$

($10^{-1}=\frac{1}{10}=\frac{1}{10}\times\frac{1}{10}\times10=10\times\frac{1}{100}=10\times10^{-2}$)

$=10^{-2}\times(8\times10-4)$

$=76\times10^{-2}$

乘除的部分，若相乘的是乘方，我們則看被乘數的乘方是否有相同的底數，若有相同的底數，則可以容易合併起來。若相乘的是一般的數，則和被乘數的乘數合併。

例如: $3^5 \times 3^6 = (3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3) \times (3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3)$

共有 11 個 3 相乘，故$3^5 \times 3^6 = 3^{11}$

例如: $5 \times (2 \times 3^6) = (5 \times 2) \times 3^6 = 10 \times 3^6$。

除法也是相同的原則:

例如: $(2 \times 3^6) \div 3^3$

$$= \frac{2\times3^6}{3^3} = \frac{2\times3\times3\times3\times3\times3\times3}{3\times3\times3} = 2 \times 3 \times 3 \times 3 = 2 \times 3^3$$ 。

例如: $(2 \times 3^6) \div 2 = \frac{2\times3^6}{2} = 3^6$。

小試身手:

1.請比較下列大小關係，請在括號中填入(> 、 < 或 =)。

(1) 3.2×6^{-2} (　　) 3.2×6^{-3}。

(2)-4×8^2 (　　)-4×8^5。

(3) 150×12^4 (　　) 1×12^6。

2.請比較下列大小關係，請在括號中填入(> 、 < 或 =)。

(1) 7.1×6^{-8} (　　) 7.1×2^{-8}。

(2)-1.4×8^6 (　　)-1.4×12^6。

(3) 64×3^5 (　　) 2×6^5。

3.請比較下列大小關係，請在括號中填入(> 、 < 或 =)。

(1) 81×8^3 (　　　) 2×12^4。

(2) 6×5^6 (　　　) 49×6^5。

(3) 11×7^4 (　　　)13×3^8。

4.(1)(　　)下列哪一個選項介於-3×2^5 與-4.9×2^5之間?

(A)-4×10^5 (B)-8×2^4 (C)-30×2^6 (D)-2×2^5

(2)有一顆隕石距離地球3×10^5 公尺，它相當於距離地球

(　　　　　　　　　)公里。(請用科學記號表示)

單元練習(Exercise for section 12)

§ 12.1 請計算下列之值:

(a)$-5^2+5^0-(-5)^2+(-5)^2\times(-5)^0=$ (　　　　　)。

(b)$(-7)\times(-7)^0+5^2\times 5-(-3)^3=$ (　　　　　)。

(c)$2^6\times(-2)^3\div(-1)^{99}=$ (　　　　　　)。

§ 12.2 (a)$6021503=a\times10^6+b\times10^5+c\times10^4+d\times10^3+e\times10^2+f\times10^1+3$，則$a+b+c+d+e+f=$ (　　　　　)。

(b) 1.13×10^6 展開後共有(　　)個零，1.12×10^{-3} 展開後小數點後共有(　　)個零。

§ 12.3 (a)2×10^4是 2×10^1的(　　　　)倍。

(b) 5×10^{-1}是 5×10^{-3}的(　　　　)倍。

(c) $7.4\times10^3=$ (　　　　　　) $\times 10^{-2}$。

§ 12.4 請以科學記號表示下列各數:

(a)八千六百五十九萬 = (　　　　　　　　　　)。

(b) $\frac{2}{1000}=$ (　　　　　　　　　　)。

(c)0.1258 = (　　　　　　　　　　)。

§ 12.5 請將下列各數轉換爲科學記號:

(a) 1444×10^{-2} =( )。

(b) $\frac{1}{8} \times 10^{3}$ =( )。

(c) 0.024×10^{12} =( )。

§ 12.6 請比較下列大小關係，請在括號中填入(> 、 < 或 =)。

(a) -13×5^{12} ( ) -13×6^{12} 。

(b) 9.2×4^{6} ( ) 920×4^{5} 。

(c) -2×6^{5} ( ) -71×3^{7} 。

(d) 18×9^{11} ( ) 19×11^{12} 。

§ 12.7 (a)政府發放振興券，全台 2300 萬人，每人可以拿到 5000 元，則政府需要準備( )元。

(請以科學記號表示)

(b)有一土地面積 147690000 平方公尺，若以科學記號表示，四捨五入取至小數點後兩位:( )，與實際誤差( )平方公尺。

§ 12.8☆ A elephant weighs 10000 pounds.Show 10000 as a power of 10 using an exponent.

§ 12.9☆ The mass of the moon is about 7347700×10^{16} kg. Show it in scientific notation.

§ 12.10☆ If a cpu can execute one operation every 10^{-9} second,how long would it perform 7.5 million operations? Please show it in scientific notation.

第 13 章 質因數分解

在六上時曾經學習過質因數分解，沒錯，現在起這些數拆成一堆因數的相乘，我們可以透過上個章節的指數記法，讓它有更統一的表示法。在找最大公因數、最小公倍數上也有更快速的方法。透過指數的記法、科學記號，我們也可以求 Big Number 的最大公因數、最小公倍數。

(例如:有兩顆行星在同一個平行軌道上運行，兩顆行星剛好與太陽重疊的問題。例如:我們在過濾水時，將水通過一道道濾膜，膜上孔洞的大小，便會取可以通過的大小的最小公倍數。)

a. 指數記法與標準分解式

我們過去使用短除法求出每一個數的質因數分解，若想複習相關內容可以參閱 ch0 的 d 小節。

為了提升效率，短除法的質因數分解，多數課本是以最小的質數 2 開始做，當我們熟練後編者可以建議從判斷中最大的質數開始做(甚至可以不要以質數去做，以容易分解的合數去做(最後再次分解、合併合數))，例如:

$$\begin{array}{r|l} 2 & 180 \\ \hline 2 & 90 \\ \hline 3 & 45 \\ \hline 3 & 15 \\ \hline & 5 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r|l} 10 & 180 \\ \hline 9 & 18 \\ \hline & 2 \end{array}$$

左圖是我們一般正規的作法，我依序從最小的質數逐漸分解 180，而得到$180 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5$。

右邊則是使用了直觀上的一個合數 10 率先分解，接著又用次大的整數 9 繼續做，故得到$180 = 10 \times 9 \times 2$。然而這樣並不是質因數分解式，因此還需要再次修正，我們知道

$$10 = 2 \times 5 \quad , \quad 9 = 3 \times 3 \ ,$$

而得$180 = 10 \times 9 \times 2 = 2 \times 5 \times 3 \times 3 \times 2 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5$。

最後兩者是一樣的。

⊙右邊方式，在實務上效率是比較好，但初學階段我們要先學好左邊基本的。

右邊方法的概念，便是將一個數拆成無數個我們熟悉的部分，像是 10、100、9、4…等等，將一個大數拆成數個部分(part)，個別質因數分解後再合起來。

左邊作法像是我們在拼拼圖，拼出外框後逐漸由外往內拼出；而右邊的方法則是我們找到圖中一個重要特徵就以此為中心拼出一個部分，多個部分拼出後最後再整個拼起來。

在這個作法中，我們看見了一個可以不用短除法便可以直接直質因數分解的方法，我們稱橫式的質因數分解(或樹狀質因數分解)，若有一個數，腦中有一個或多個可以直接整除它的數，則我們則將其數拆成這些數相乘。

例如: $120 = 2 \times 60$、 $120 = 3 \times 40$、$120 = 6 \times 20$、$120 = 10 \times 12$…拆成的方法可能有多種，都是沒有問題的，但有以下幾種原則優先採用:平方數、立方數優先(例如:$2^2 = 4$、$3^2 = 9$、$2^3 = 8$…)、熟悉又常用的數優先(例如:10 可以馬上拆成 2 和 5 相乘、15 可以馬上拆成 3 和 5 的相乘等等)、不需要再次短除法質因數分解的優先(像是 60，直觀上要再拆成 6 和 10 的相乘，6、10 又要再拆一次)。

接著，我們反覆持續分解成都是質數的相乘，便可以完成質因數分解式。

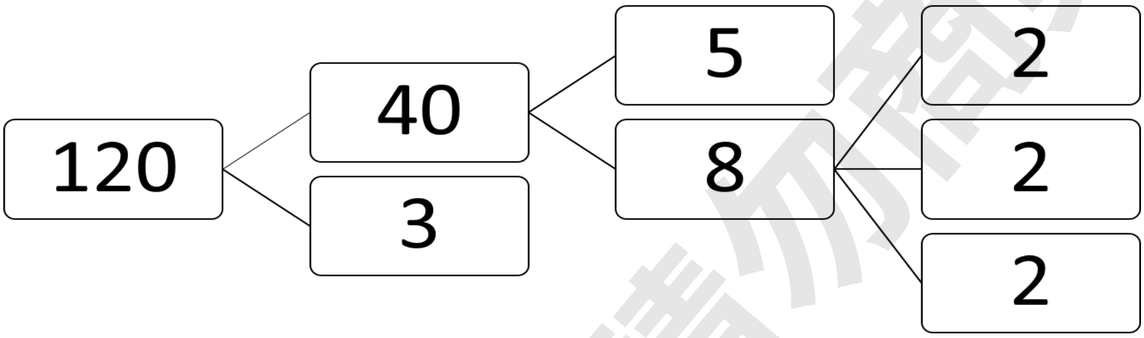
我們繼續比較上面 120 的例子的質因數分解式:

$$120 = 2 \times 60 = 2 \times 6 \times 10 = 2 \times 2 \times 3 \times 2 \times 5$$

$$120 = 3 \times 40 = 3 \times 5 \times 8 = 3 \times 5 \times 2 \times 2 \times 2$$

$$120 = 6 \times 20 = (2 \times 3) \times (4 \times 5) = 2 \times 3 \times 2 \times 2 \times 5$$

$$120 = 10 \times 12 = 2 \times 5 \times 3 \times 4 = 2 \times 5 \times 3 \times 2 \times 2$$



我們可以從上圖看出$120 = 3 \times 40 = 3 \times 5 \times 8 = 3 \times 5 \times 2 \times 2 \times 2$，故它也稱樹狀的質因數分解。

我們上章節學了指數記法後，質因數分解式的表示也變得更簡便，例如: $120 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5 = 2^3 \times 3 \times 5$。

例如: $180 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 = 2^2 \times 3^2 \times 5$。

我們則稱這種以指數記法的質因數分解，稱為「標準分解式」。

小試身手:

1.請寫出下列各數的標準分解式:

(1)1260 = (   )。

(2)819 = (   )。

(3)2720 = (   )。

2.請寫出下列連乘數的標準分解式:

(1) $30 \times 24 \times 82 =$ (　　　　　　　　　)。

(2) $35 \times 100 =$ (　　　　　　　　　)。

(3) $81 \times 4 \times 45 =$ (　　　　　　　　　)。

3.若甲數$= 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6$，則甲數的標準分解式為(　　　　)，甲共有質因數共(　　)個，分別是(　　　　　　　)。

4.最小的質數是(　　)，質數中唯一的偶數是(　　)，1~20 共有(　　)個質數。1 至 100 所有的質數共有 25 個，分別是:

(____)

(____)

(____)

(____)。

b. 常用倍數的判別法

在這個小節中，我們將學習比較有效率的方法去判斷一個數有沒有一些常見的因數。

我們其實在過去學習中曾經學過「2 的倍數判別法」，也就是奇數、偶數的判別，也就是一個數的個位數是 0、2、4、6、8，它就是偶數也就是 2 的倍數。例如:122、1208。

◎我們在過去也學過「5 的倍數判別」，也就是個位數字是 0、5 的話，那麼這個數字可以被 5 整除。例如:1205、12315、300。

◎首先，我們看 3 的倍數判別法，若將每一位數數字和加起來，若它可以被 3 整除，那麼該數就是 3 的倍數。

例如:1302，我們將 $1+3+0+2=6$ 可以被 3 整除，故 1302 是 3 的倍數。

例如:2501，我們將$2+5+0+1=8$ 不可被 3 整除，故 2501 是 3 的倍數。

例如:654，我們將$6+5+4=15$ 可以被 3 整除，故 654 是 3 的倍數。

我們不禁好奇，為什麼是可以這樣判定的?

我們試想有一個百位數abc，以 10 進位表示式展開成:

$$a\times 100+b\times 10+c。$$

這邊需要強調一個概念:若有一串數字相加，如果每一項都是 2 的倍數的話，最後這串相加的會是 2 個倍數嗎?

例如: $2+4+8+16+20$，最後也是 2 的倍數，為什麼呢?

我們可以這樣看:$2\times 1+2\times 2+2\times 3+2\times 4+2\times 10$，每一項都是 2 的倍數，接著我們用逆結合律，提出 2。$2\times(1+2+3+4+10)$ 成了兩數相乘，而且其中有 2 個因數。

因此我們有一個結論，若有一個數拆成多個數相加，每一項都是 A(正整數)的倍數時，該數也必有 A 這個因數。

我們回到 $a\times 100+b\times 10+c$，這三項我們試想能不能讓它都有 3 這個因數呢?

我們讓 100、10 動一下手腳，變成$99+1$ 與 $9+1$。

$a\times 100+b\times 10+c=a\times(99+1)+b\times(9+1)+c$ 再用分配律展開

$=a\times 99+a\times 1+b\times 9+b\times 1+c$ $a\times 1$就是 a 本身、

$b\times 1$也是等於b。

$=a\times 99+b\times 9+a+b+c$

前兩項$a\times 99$ 與 $b\times 9$，無論 a 和 b 是任何整數，都不影響前兩項是 3 的倍數。於是我們得到結論，後面三項的和必須要是 3 的倍數，原來的數才是 3 的倍數，也就是為什麼我們要將每個位數數字和加總起來。

至於 4 位數的證明也是同樣的，這裡簡單寫出給讀者看看。

有一個四位數abcd，則 $a\times 1000+b\times 100+c\times 10+d=a\times(999+1)+b\times(99+1)+c\times(9+1)+d=a\times 999+b\times 99+c\times 9+(a+b+c+d)$

同樣也是將四位數字加總只要是 3 的倍數，該數必是 3 的倍數，這便是 3 的倍數判別法。因此，只要是可以「算」得出來的「位數」，都可以利用這樣的方法證明。

◎4 的倍數判別法:該數字的末兩位數是 4 的倍數，該數必有「4」這個因數。

☆我們這裡要特別強調一點，文字用詞上「一數字的末兩位」與「一數字的末兩位數字」是不同的意思。

例如:1284，它的末兩位指三十四，末兩位數字指 8 與 4。則 1284 末兩位是末兩位數字和的 7 倍數，即$84\div(8+4)=7$。

我們下面來看一些實際 4 的倍數判別例子:

例如:2324，末兩位是 24，可以被 4 整除，故 2324 有 4 這個因數。

例如:732，末兩位是 32，可以被 4 整除，故 732 有 4 這個因數。

例如:5318，末兩位是 18，不可以被 4 整除，故 5318 不可能有 4 這個因數。

那麼，又是什麼原因可以這樣判別呢?

我們觀察 10 是不能被 4 整除的，而 100 可以($100 \div 4 = 25$)，而 100 以後的 10 的倍數，如 1000、10000…都會有 4 個倍數，因為$1000 = 100 \times 10 = 4 \times 25 \times 10$，

$$10000 = 100 \times 100 = 4 \times 25 \times 100 \cdots 。$$

若一個三位數abc，則可以表示$a \times 100 + b \times 10 + c$，第一項必有 4 這個因數，剩下後面兩項$b \times 10 + c$，它要是可以被 4 整除，整個數才有 4 個因數。

因此我們是說末兩位數，而非兩數字!

我們也簡單看四位數$abcd$，$a \times 1000 + b \times 100 + c \times 10 + d$，我們也發現前兩項都是 4 個倍數了，剩下末兩項$c \times 10 + d$要可以被 4 整除的話，$abcd$才是 4 個倍數。

這裡證明雖然都只給了三、四位數，但這判別法是可以判定更多有限位數的通則，它的通則證明要等到大學數論才有辦法證明。這裡判別方法莫以為只能適用四位數以下的數!

◎6 的倍數判別:同時滿足 2 的倍數與 3 的倍數判別。即尾數是 0、2、4、6、8 及每位數的總和是 3 個倍數，兩者同時滿足。

例如:912，$9+1+2=12$ 為 3 的倍數，且尾數是 2，則 912 是 6 的倍數。

◎7 的倍數判別法:將該數從個位數起，每三位取一區間，則(奇數區間總和)和(偶數區間總和)相減後是 7 的倍數的話，則該數是 7 的倍數。(適用 4 位數以上的方法)

例如:123130，130 是一區(奇數區) 、 123 是一區(偶數區)，將$130-123=7$，是 7 的倍數，則 123130 是 7 的倍數。

例如:234388231，231 是一區(奇數區)、388 是一區(偶數區)、234 是一區(奇數區)，則(奇數區總和)$231+234-$(偶數區總和)$388=465-388=77$是 7 的倍數，則 234388231 是 7 的倍數。

註:若 3 位數以下的數只能直接以 7 去除看能否整除。

看起來 7 的判別方法是常見判別中比較複雜的，至於為什麼可以這樣做呢，我們舉 4 位數$abcd$為例:

$abcd=a\times1000+b\times100+c\times10+d$ 我們觀察 10 附近的數 9 和 11 都不是 7 的倍數，100 附近的 99 和 101 也都不是 7 的倍數，1000 的附近 1001 是 7 的倍數。

於是我們改寫一下:

$$\begin{aligned}abcd &= a\times(1001-1)+b\times100+c\times10+d\\ &= a\times1001-a+b\times100+c\times10+d\end{aligned}$$

第一項是 7 的倍數，後面式子則是$b\times100+c\times10+d-a$。若末三位減去第四位數後是 7 的倍數的話，則這個四位數$abcd$是 7 的倍數。

接著我們直接看 6 位數$abcdef$，$abcdef = a \times 10^5 + b \times 10^4 + c \times 10^3 + d \times 10^2 + e \times 10 + f$

我們在前個四位數例子中知道 1000 可以用 1001−1 去處理，10000 也可以用$1001 \times 10 - 10$去處理，100000 則$1001 \times 100 - 100$處理。

則$abcdef = a \times (1001 \times 100 - 100) + b \times (1001 \times 10 - 10) + c \times (1001 - 1) + d \times 100 + e \times 10 + f$

$$= a \times 1001 + b \times 1001 + c \times 1001 - a \times 100 - b \times 10 - c + d \times 100 + e \times 10 + f$$

我們可以看出前面三項都是 7 的倍數，若後面項是 7 個倍數，則該數就是 7 的倍數，我們稍微整理後面項。

$$-a \times 100 - b \times 10 - c + d \times 100 + e \times 10 + f$$
$$= -(a \times 100 + b \times 10 + c) + (d \times 100 + e \times 10 + f)$$
$$= (d \times 100 + e \times 10 + f) - (a \times 100 + b \times 10 + c)$$

將每三項分成一組，若兩組相減是 7 的倍數，則六位數$abcdef$則是 7 的倍數，這便是 7 倍數判別法方法的緣由。

◎8 的倍數判別法:取該數的末三位是 8 的倍數的話，則該數是 8 的倍數。

在看了前面這麼多次的證明後，我們可以果斷去猜測一下 10、100、1000、10000…中是否有可以被 8 整除或是其附近的數可以被 8 整除。然而，可以發現 10 與 10 的附近 9 及 11 都不行被 8 整除，100 與 99、101 也都不行，而 1000 是可以被 8 整除的。於是，我們假設有一四位數$abcd$，則可以表示成$a \times (8 \times 125) + b \times 100 + c \times 10 + d$，那麼第一項是可以被 8 整

除，剩下的 b 百 c 十 d 若可以也被 8 整除的話，則這四位數 abcd是 8 的倍數。

例如:12345008 末三位是 8 可被 8 整除、54321888 末三位 888 可被 8 整除、7800 末三位 800 也可被 8 整除…等都是 8 的倍數。

◎9 的倍數判別法:將所有位數的總和可以被 9 所整除，則該數是 9 的倍數。

例如:4284，$4+2+8+4=18$ 可以被 9 整除，4284 是 9 的倍數。

例如:792，$7+9+2=18$ 可以被 9 整除，792 是 9 的倍數。

同時，279、297、729、927、972 也同時都是 9 的倍數。

我們也簡單來看判別法為什麼可以這樣做?

我們假設有一四位數abcd，所有 10 的倍數減 1 後都是 9 的倍數，故$a\times(999+1)+b\times(99+1)+c\times(9+1)+d=a\times999+a\times1+b\times99+b\times1+c\times9+c\times1+d=a\times999+b\times99+c\times9+(a+b+c+d)$，前面三項都是 9 的倍數，故若$a+b+c+d$是 9 的倍數，即四位數的總和是 9 的倍數，則該數是 9 的倍數。

◎11 的被數判別法:將(奇數項位數總和)與(偶數項位數總和)相減是 11 的倍數，若符合這個條件的數，則是 11 的倍數。

例如:121，二位數最小的 11 的倍數，且$11^2=121$，則奇數項有個位數的 1 與百位數的 1、偶數項則有十位數的 2，則(奇數項位數總和$1+1=2$)–(偶數項位數總和2)$=2-2=0$，0 也為 11 的倍數，故 121 是 11 的倍數。

例如:70345，(奇數項位數總和$5+3+7=15$)–(偶數項位數總和$0+4=4$)$=15-4=11$，故 70345 是 11 的倍數。

在開始解釋 11 的倍數判別法之前，我們先觀察 10、100、1000、10000 等 10 的次方與 11 之間的關係，10 可以由$11-1$得到，100 則可以由$99+1$得到，1000 可以由$1001-1$得到，而 10000 可由$9999+1$得到，我們發現都 10 的次方可以由兩種類型得到 11 的倍數。

假設有一 5 位數abcde，則可以表示$a\times(9999+1)+b\times(1001-1)+c\times(99+1)+d\times(11-1)+e$。我們將其以分配律展開$a\times 9999+a\times 1+b\times 1001-b\times 1+c\times 99+c\times 1+d\times 11-d\times 1+e=a\times 9999+b\times 1001+c\times 99+d\times 11+(a-b+c-d+e)$，我們發現前四項都是 11 的倍數，剩下的$(a-b+c-d+e)$之值若是 11 的倍數，則該數就是 11 的倍數。我們剛好發現它的規律，$a-b+c-d+e$ 可以改寫成$(a+c+e)-(b+d)$，即奇數位總和減去偶位數的總和。若它結果是 11 的倍數，則該數便是 11 的倍數。

以上是常見的倍數的判別的方法，13 的倍數其實也有判別方法，和 7 的倍數判別法有一點類似，留給讀者挑戰。

小試身手:

1.下列何者是 3 的倍數? (   )，

何者是 6 的倍數? (   )。

(1)235 (2)312 (3)512 (4)207 (5)4083 (6)27318

2.下列何者是 7 的倍數? (   )，

何者是 11 的倍數? (   )。

(1)253 (2)322 (3)1505 (4)1771 (5)25557 (6)186615

3.(1)若「234□19」是 3 的倍數，則□有可能是(　　　　　)。

(2)若「99999922□」有 8 的因數，則□有可能是(　　　　)。

(3)若「6□1」可以同時被 3 與 7 整除，則□有可能是(　　　)。

4.1~100 中，所有 3 的倍數共有(　　)個，7 的倍數共有(　　)個，同時是 3 和 7 的倍數的共有(　　)個。(提示:去找第一個和最後一個後，思考它們關係)

c. 標準分解式與因數關係

我們若得到標準分解式，我們可以透過標準分解式得到那個數的所有因數嗎?

過去我們在找一個數的所有因數時，我們會從 1 開始不停+1後嘗試去看能否整除，來判斷是否是它的因數，例如:18，我們嘗試以 1、2、3、4、5、6…直到 18，分別除以 18 確認是否能整除，最後得到 18 的因數有:1、2、3、6、9、18，共 6 個。既然我們有了標準分解式，那能否能解決一個一個慢慢除來尋找因數的方法。

我們同樣以 18 來思考，它的標準分解式:2×3^2，它固然是$2 \times 3 \times 3$的意思，我們比對它的所有的因數，我們發現可以透過標準式的各個質數，以不同組合來組出所有的因數，例如因數 6 可以由 2 和 3 相乘得到、因數 9 可以由兩個 3 相乘得到。

我們再看個例子:120，它的標準分解式為: $2^3 \times 3 \times 5$。

它因數必然有 1，

取2^1，它會有因數 2。

取 3，它會有因數 3。

取2^2，它會有因數 4。

取 5，它會有因數 5。

取$2^1 \times 3$，它會有因數 6。

取2^3，它會有因數 8。

取$2^1 \times 5$，它會有因數 10。

取$2^2 \times 3$，它會有因數 12。

取3×5，它會有因數 15。

取$2^2 \times 5$，它會有因數 20。

取$2^3 \times 3$，它會有因數 24。

取$2^1 \times 3 \times 5$，它會有因數 30。

取$2^3 \times 5$，它會有因數 40。

取$2^2 \times 3 \times 5$，它會有因數 60。

取 $2^3 \times 3 \times 5$，它會有因數 120。

「120 的因數有:1、2、3、4、5、6、8、10、12、15、20、24、30、40、60、120，共 16 個。」

我們發現，它指數的組合找因數的方法效率依然沒有很好，但是我們知道它是一個這樣的問題:

2^0 2^1 2^2 2^3	3^0 3^1	5^0 5^1

有三個箱子，分別各有 4 顆球、2 顆球、2 顆球，每 2 顆球上面有指數的標記，而 18 所有的因數是在三顆球中各拿取一顆球的所有組合。

例如:在左邊箱子拿到2^0、中間箱子3^0、右邊箱子拿到5^0，

則得到因數$1 \times 1 \times 1 = 1$。

例如:在左邊箱子拿到2^2、中間箱子3^0、右邊箱子拿到5^1，

則得到因數$4 \times 1 \times 5 = 20$。

例如:在左邊箱子拿到2^3、中間箱子3^1、右邊箱子拿到5^0，

則得到因數$8 \times 3 \times 1 = 24$。

雖然這樣求取因數的方法依舊效率不彰，但是轉化成這樣的問題後，我們卻意外找到一個數它會有多少個因數的方法。

若有兩個箱子，箱子中各有兩個球分別一個箱子裝有 1 號與 2 號球與另一個箱子有 3 號與 4 號球，則組合共有 1 號球與 3 號球、1 號球與 4 號球，與 2 號球與 3 號球、2 號球與 4 號球，共有 4 種組合。

若完成一件事情，拆成甲、乙兩個階段，若完成甲階段有 A 種方法，而完成乙階段有 B 種方法，則完成整個事情的方法有$A \times B$種方法。

在日後正式課程，我們將這種概念稱之「乘法原理」。

那麼，在原來這個問題中，我們知道共有$4 \times 2 \times 2 = 16$種，即 18 的因數共有 16 個。

例如:若有一個數: $3 \times 5^2 \times 7 \times 11^3$，則 3 的部分會有$3^0$及$3^1$二種方法，5 的部分會有$5^0$、$5^1$、$5^2$三種，7 的部分會有$7^0$及$7^1$二種，11 則會有$11^0$、$11^1$、$11^2$、$11^3$四種，則它共有$(2 \times 3 \times 2 \times 4) = 48$個因數。

若給你一個數，怎麼判斷它是不是這個數的因數，除了直接拿去除之外，有沒有其他方法呢?

前面的概念告訴我們，它只要在標準分解式中，它便是這個數的因數。

例如:有個數$3^2\times 5(=45)$，則3^2是它的因數，

但 $3^3(=27)$超過了3^2，所以不是。

所以，因數是在標準分解式中那些指數的組合，如上述例子中，也不會有超過原本標準分解式中最大的指數的數(如:出現 3^3、3^4…以上都不可能是該數的因數)。

雖然一個一個找因數與使用標準分解式組合找因數都不是很有效率，但是我們透過上述方法明確得到一個數所有因數的總數後，我們在找時就知道自己是否有遺漏或是有錯誤。

小試身手:

1.下列何者是 352 的因數? ( )。

(1) 2^2 (2) 3^3 (3) 3×7 (4) 3^5 (5) $2^2\times 11$ (6) $2^2\times 3^2$

2. 下列何者是$2^4\times 3^1\times 7^3\times 11$的因數? ( )。

(1) $2^5\times 7$ (2) 3^3 (3) 3×7 (4) $2^4\times 3$ (5) $2^5\times 11$ (6) $2^4\times 7^2$

3.(1)請列出 84 所有因數，請以指數記法表示:

(____)

(____)

(____) 。

(2)有一數$2^3\times 3^{\square}\times 5^2\times 7$，已知它因數有 30，但 18 不是它的因數，則□是( )。

(3)有一個長方形面積是$2^3 \times 19$平方公分，則它的長度可能有

(　　)種。(「長 1 公分、寬 2 公分」與「長 2 公分、寬 1 公分」視為不同種長方形，即兩種長度)

4.(1)56 共有(　　)個質因數，(　　)個因數。

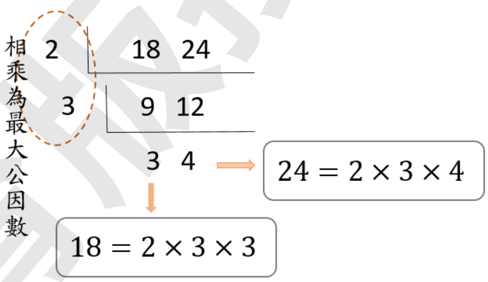
(2) $2^5 \times 11^4 \times 17^2 \times 23$共有(　　)個質因數，(　　)個因數。

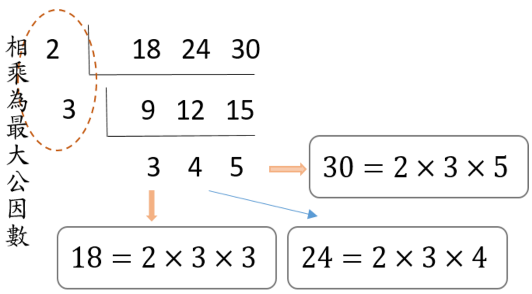
d. 最大公因數及最小公倍數

在六上時，我們也曾完整學習過最大公因數與最小公倍數的概念(詳見 ch0 複習)，在國中起我們開始處理三個數以上的最大公因數與最小公倍數。

我們延伸短除法的使用，最大公因數的部分，如同求二位數的最大公因數般，若三數間有共同的因數則一齊提出，直到三數共通因數是 1 為止，而右側的相乘是最大公因數。

如下圖例子所示，左側是過去曾經學過的兩數的最大公因數，而右側是三位數的例子。





短除法有個在計算上有個方便的地方，它的的最大公因數與三數最後的結果相乘會得到原來的數，如圖所示，18 會等於最大公因數 6 乘上它最後結果 3，非常方便。

例如:有黑巧克力 18 個、白巧克力 24 個，平均裝入盒子中沒有剩下的情況下，最多可以裝幾盒? 每盒中各有多少個白巧克力及黑巧克力?

以黑巧克力 18 個來說，可以 1 個裝 1 盒共 18 盒，

可以 2 個裝 1 盒共 9 盒，

可以 3 個裝 1 盒共 6 盒…，

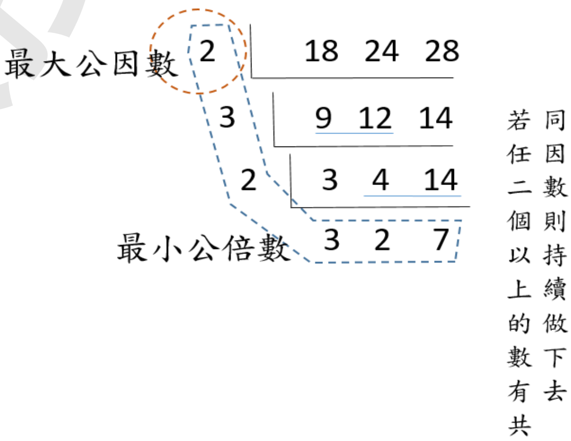
白巧克力也可以 1 個裝 1 盒共 24 盒，

可以 2 個裝 1 盒共 12 盒…，

我們則是要取兩數的最大公因數 6，則可以裝 6 盒，

每盒黑巧克力 3 個、白巧克力 4 個。

但在求最小公倍數時，有些許的不一樣。短除法中三個數的最小公倍數，原則上和兩個數是一樣的，但是有任意兩個數之間還有除了 1 之外的公因數則繼續進行的進行條件，而另一個數則一樣抄寫下來後，直至最後公因數都只有 1 為止，而最小公倍數是所有左側的數字與三數下方最後數字的乘積。18、24、28 的最小公倍數:$2 \times 3 \times 2 \times 3 \times 2 \times 7 = 252$。



在求最小公倍數時，是可以先找最大公因數後，再繼續找最小公倍數(當然也是可以直接進行找最小公倍數的部分)，有一點要特別注意，下方左圖是初學時容易犯錯，常在圈起來的部分短除法的進行就停止了，只要有任意兩個數之間有可以繼續下去就必須進行，如下方右圖才是正確。

$$
\begin{array}{r|rrr}
2 & 30 & 14 & 42 \\ \hline
3 & 15 & 7 & 21 \\ \hline
 & 5 & 7 & 7
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{r|rrr}
2 & 30 & 14 & 42 \\ \hline
3 & 15 & 7 & 21 \\ \hline
7 & 5 & 7 & 7 \\ \hline
 & 5 & 1 & 1
\end{array}
$$

在中學之後，最大公因數與最小公倍數，因為字數太過長，

我們習慣(甲,乙,丙)= 丁 以小括號表示最大公因數，

[甲,乙,丙] = 丁 以中括號表示最小公倍數。

例如:$(3,4,5)=1$，表示數字 3、4、5 的最大公因數是 1。

以前我們曾說兩數字的最大公因數是 1 的情況下，會稱這兩個數「互質」，而三個數字的最大公因數是 1 時，我們稱這三個數互質。

註:當甲乙丙三數最大公因數是 1 時，且甲和乙互質、乙丙互質及甲丙互質，這時我們則稱甲乙丙三數「兩兩互質」。

甲和乙互質，乙和丙互質，則甲乙丙三數仍是互質。但是甲乙丙互值下，不一定有甲和乙互質與乙和丙互質這個關係。

例如:甲是 5、乙是 7、丙是 10，甲和乙互質，乙和丙互質，但甲和丙$(5,10)=5$，但是它們三數依然互質。

註:互質並不一定每個數要都是質數才能最大公因數為 1，互質的「質」並非質數的意思，而是取像質數那樣公因數只有 1 與自己本身的概念。

例如:$[\,3,4,5\,] = 60$，表示數字 3、4、5 的最小功倍數是 60。

註:除了用小括號及中括號外，甲和乙的最大公因數丁我們也以 gcd(甲,乙) =丁，甲和乙的最小公倍數丁 lcm(甲,乙) =丁表示(第一個是英文字母 L 的小寫)。

註:在使用短除法求最大公因數與最小公倍數時，若熟練後可以以較大的數先進行行(如做標準分解式一樣)，提升進行的效率。

熟練短除法後，有些數是用指數記法表式或是標準分解式的，難道一定要全部乘開去做短除法後才能得到最大公因數與最小公倍數嗎?

我們回想最大公因數的意思是兩個數中的因數中「最大共同」因數，則我們只要比較兩個數之間共同的質因數，我們再分別在該質因數中指數取兩者最小的，則它便是兩數的最大公因數。

例如: $2^4 \times 5 \times 7$與$2^2 \times 3 \times 5$　兩數之間有共同的質因數 2 與 5，2 的指數部分我們取後面比較小的 2 次方，而 5 的指數部分兩者都是 1 次方，5 則是一樣取 1 次方，則它們的最大公因數$2^2 \times 5$，即$(2^4 \times 5 \times 7, 2^2 \times 3 \times 5) = 2^2 \times 5$。

例如:$(2^2 \times 3^4 \times 5 \times 11^2, 2^3 \times 3 \times 7 \times 11^3)$ 我們先找到相同的質因數有 2、3、11，2 的指數取 2 次方，3 的指數取 1 次方，11 的指數取 2 次方，則$(2^2 \times 3^4 \times 5 \times 11^2, 2^3 \times 3 \times 7 \times 11^3) = 2^2 \times 3 \times 11^2$。

若是三數的最大公因數，也是同樣的想法:

例如:$(2^2 \times 3^4, 2^2 \times 3 \times 11^2, 2^1 \times 3^2 \times 11)$ 找到三數之間共同質因數 2 與 3，2 的指數取三者之間最小的 1 次方，而 3 的指數取最小的 1 次方，則$(2^2 \times 3^4, 2^2 \times 3 \times 11^2, 2^1 \times 3^2 \times 11) = 2 \times 3$。

註:若不是使用標準分解式來找最大公因數，合數容易造成我們在尋找公因數上的缺少或是計算錯誤，我們都會盡量化為標準分解式。

而最小公倍數，我們一樣回想它的意思，是兩數之中倍數中，共同的最小的倍數稱最小公倍數。若在標準分解式情況下，最小公倍數取所有的質因數，它會是任何的質因數的被數，指數上也取兩者之間最大的。

例如: $2^4 \times 5 \times 7$與$2^2 \times 3 \times 5$

兩數之間所有的質因數 2、3、5 與 7，

2 的指數部分我們取前面比較大的 4 次方，

3 的指數部分直接用原來的 1 次方，

5 的指數部分取原來的 1 次方，

而 7 的指數是 1 次方，則它們的最小公倍數$2^4 \times 3 \times 5 \times 7$，

即$[2^4 \times 5 \times 7, 2^2 \times 3 \times 5] = 2^4 \times 3 \times 5 \times 7$。

例如:$[2^2 \times 3^4 \times 5 \times 11^2, 2^3 \times 3 \times 7 \times 11^3]$ 我們先找所有質因數有 2、3、5、7、11，2 的指數取 3 次方，3 的指數取 4 次方，5 的指數取 1 次方，7 的指數取 1 次方，11 的指數取 3 次方，則$(2^2 \times 3^4 \times 5 \times 11^2, 2^3 \times 3 \times 7 \times 11^3) = 2^3 \times 3^4 \times 5 \times 7 \times 11^3$。

三數的最小公倍數也是一樣的，請見下列例子:

例如:$[2^2 \times 3^4, 2^2 \times 3 \times 11^2, 2^1 \times 3^2 \times 11]$

我們找到三數之間所有質因數 2 與 3、11，

2 的指數取三者之間最大的 2 次方，

而 3 的指數取最小的 4 次方，11 的指數取 2 次方，

則$(2^2 \times 3^4, 2^2 \times 3 \times 11^2, 2^1 \times 3^2 \times 11) = 2^2 \times 3^4 \times 11^2$。

最大公因數與最小公倍數之間與兩數有沒有什麼樣的關係呢?

任二數的最大公因數與最小公倍數的乘積等於兩數的乘積。

換句話說，若 a、b 二正整數，則$(a,b)\times[a,b]=a\times b$。

$$
\begin{array}{r|rr}
2 & 18 & 24 \\ \hline
3 & 9 & 12 \\ \hline
 & 3 & 4
\end{array}
\qquad \boxed{24=2\times3\times4}
\qquad \boxed{18=2\times3\times3}
$$

在之前的例子中，我們可以見到 18 和 24 的最大公因數是:2×3，最小公倍數是:$2\times3\times3\times4$。而透過短除法，得到$18=(2\times3)\times3$，$24=(2\times3)\times4$，且其中的(2×3)是最大公因數。

最大公因數與最小公倍數相乘，可以看成最大公因數乘上最大公因數後$(2\times3)\times(2\times3)$，再乘上最後的的橫列的$(3\times4)$。

因此$18\times24=(2\times3)\times(2\times3)\times3\times4$會等於最大公因數與最小公倍數相乘。

這個結果，只適用在兩數的情況，在三數的情況，結果則是不一定的。除非這三個數滿足任二數兩兩互質的情況下，則三數的乘積會等於它們的最大公因數與最小公倍數的乘積。

例如:在 3、4、5 三數的情況下，不但三數互質且任兩數都是互質的，$(3,4,5)=1$、$[3,4,5]=3\times4\times5$，我們在這個例子中可以顯然看出兩兩互質這個結果必然正確的原因。

例如:在 3、4、9 三數的情況下，三數是互質的，$(3,4,9)=1$、$[3,4,9]=3\times4\times3$，則最大公因數與最小公倍數相乘:

$$1\times3\times4\times3\neq3\times4\times9$$ 不等於兩數相乘。

小試身手:

1.請求出下列的最大公因數與最小公倍數:

(1)(60,126) =(　　　)，[60,126] =(　　　　)。

(2)(60,105,130) =(　　　)，[60,105,130] =(　　　　)。

(3)(42,48,336) =(　　　)，[42,48,336] =(　　　　)。

2.請求出下列的最大公因數或最小公倍數:(請以標準分解式表示)

(1)$(2^5\times3^4\times7\times13^2,3^3\times5\times11\times13^2)=($　　　　　　　$)$。

(2)$(2^4\times5^2\times17^4,2^3\times5\times17^3,3^2\times17^2)=($　　　　　　　$)$。

(3)$[2^4\times5^2\times17^4,2^3\times5\times17^3,3^2\times17^2]=($　　　　　　　$)$。

(4)$[3^2\times7^1\times17^3,2^1\times5\times17^5,2^3\times7^4]=($　　　　　　　$)$。

(5)$(3\times8\times12,4\times5\times15,6\times81)=($　　　　　　　$)$。

3.是非題:

(1)(　　)兩相異質數的最大公因數必是 1，它的最小公倍數是兩數相乘。

(2)(　　)兩數的最大公因數與最小公倍數相乘的乘積就是兩數的乘積。

(3)(　　)甲數和乙數互質，指的是甲數或乙數之間，至少有一個是質數。

(4)(　　)甲、乙、丙三數互質，則甲和乙必互質，乙和丙也必會互質。

4.將數個長 28 公分、寬 21 公分的長方形積木拼成一個正方形，

則最少需要(　　　)個積木，而正方形的邊長是(　　　　)公分。

e. 質數的判別法

尋找質數與判別質數是相同的問題，在偌大的整數世界中，尋找近乎無限大的質數，一直都是人們好奇的問題，為什麼我們需要這麼多的「質數」呢?

首先，我們先試想一個場景，銀行大排長龍的客戶，他們排隊依照引導人員帶領到各個窗口辦理事務，原則上是這樣安排:將每位客戶對應可以服務的 7 個窗口，每當一個人辦理好事務出來後，引導人員會帶領排隊的下一位客戶前往所對應的該號窗口，若那個窗口還有客戶在地話，則往下一個有空的窗口進行客戶服務。

例如:3 號和 5 號窗口的客戶都辦理好事務出來了，則下一位客戶對應窗口是 2 號，但 2 號窗口的客戶還沒辦理好事務，於是會領他至 3 號空窗口。若發生往下號窗口連續找很多次的狀況，我們稱這種狀況叫「碰撞」。根據研究，若將服務的窗口調整是質數的話，碰撞的情形是最少的。

而原因是當除數是質數時，能夠比較均勻將被除數分配到每個餘數中，不會有餘數重疊的情況發生(如上面舉例)。

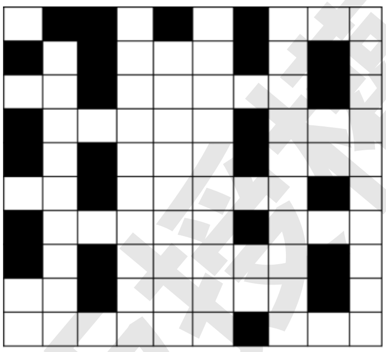
質數的因數只有 1 和自己本身，質數有「不可分割」的特性，也就是除了 1 之外拿它去除除了自己以外的數外都會產生「餘數」，因此質數對密碼、檢查的應用非常廣。

例如:甲寫了一封信給乙，事前兩人約定在書信中所有出現數字(按出現順序排列)，該一串數字除上 5 後要是整除，否則信件就是偽造的。而除上的這個數字若沒有質數的特性的話，例如除上 6 的話，那麼與除上 7 的 42 的倍數，卻都會意外的被認為都是「眞」信。

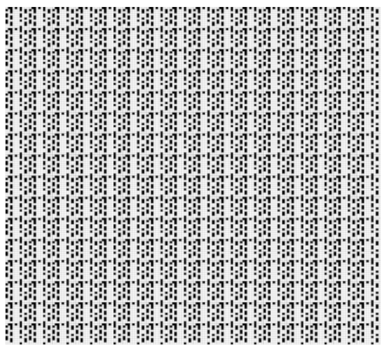
太過規律的數據中，加入了質數後，一定程度換亂的數字規律，我們說它的亂度增加了，這些「沒有規律」特性的質數，讓規律的數據增加豐富性與使人有更眞實的感覺。

設計每顆植物都是以 2 的倍數在開枝散葉，那麼它會有 2、4、8、16、32、64 等等的樹幹上散出的枝葉，那麼這棵樹顯然很「假」，加入了質數設計後它便會比較眞實，它的生長就如同我們不容易預測一般的現實才更近乎眞實。

在藝術設計上，質數也有相關的運用，例如將10×10 的 100 方格依照 1 至 10 排列，並將當中質數位置塗黑表示，如下方左圖。再以此作為摹本，反覆複製並縮小至一樣大小，如下方右圖所示，那麼我們就可以創造一塊新的紋路，可以用在服飾、地磚、商標⋯等等。也有將其以「弓」型、環狀的排列等都有其藝術表現性。



(由左至右是 1 至 10，上至下 1、11 至 91)



(以左圖為基底，為16×16共 256 塊的縮圖)

我們找到這些質數變成了一門課題，其實判別質數與尋找質數是相同的一件事情，事實上質數尋找的問題依然進行中，我們想知道它下一個出現的位置會在哪，想知道一個範圍內會有多少個質數等等，而我們也不會將所有的質數都背起來，因此判別這個數是合數或是質數是目前重要要學的。

◎判別質數的方法:我們將將該數分別除上該數以下的所有質數，若沒有一個質數可以整除它，則該數是質數。

例如:9，比 9 小的質數有 2、3、5、7，分別將 9 除上後，發現 9 可以被 3 所整除，因此 9 不是質數。

例如:11，比 11 小的質數也有 2、3、5、7，發現這些質數都不能整除 11，所以 11 是質數。

後來人們發現，這個方法可以加以改進，若一個數是一個質數×另一個質數的狀況，如果不是兩個相同質數話，必會在除上那個比較小的質數時就會發現不是質數，(例如:$161 = 23 \times 7$，當我們試 2、3、5 到 7 時就會發現 161 不是質數)，因此我們將之前的方法修正成:找到該數最接近的平方數後，以那個平方數以下的質數去除，若那些質數都無法整除該數，則該數是質數。

例如:127，比 127 小且最靠近的平方數是$11^2(= 121)$，因此分別將 127 除上比 11 小的質數:2、3、5、7、11，發現 127 都無法被這些質數所整除，因此 127 是質數。

例如:143，比 143 小且最靠近的平方數是$11^2(= 121)$，因此分別將 143 除上除上比 11 小的質數:2、3、5、7、11，發現 143 可以被 11 整除，故 143 不是質數。

這個方法使我們可以少除了近一半的質數，就可以判斷出該數是否是質數，而這方法也正被研究有沒有更有效率的方法，各位讀者心中有沒有更好的方法呢?

小試身手:

1.是非題:

(1)(　　)所有質數中除了 2 與 3 外，不可能再出現連續的質數。

(2)(　　)任兩非 1 的正整數，它們的最小公倍數必不是質數。

(3)(　　)101 是百位數中第一個質數。

2.(1)比 211 還小，最靠近 211 的平方數是(　　)的平方，將比該數小的所有質數分別除上 211 後，發現 211(　　　)質數。
(請填是/不是)

(2)比 247 還小，最靠近 247 的平方數是(　　)的平方，將比該數小的所有質數分別除上 247 後，發現 247(　　　)質數。
(請填是/不是)

3.(1)最接近 70 的質數分別是(　　　)與(　　　)。

(2)最接近 107 的質數分別是(　　　)與(　　　)。

4.下列何者是質數: (　　　　　　　　　　)

(甲)57 (乙)233 (丙)193 (丁)273 (戊)221 (己)61

單元練習(Exercise for section 13)

§ 13.1 請寫出下列標準分解式:

(a)$25 \times 48 \times 49 \times 2 =$ (　　　　　　　　　　　　)。

(b)$2548 =$ (　　　　　　　　　　　　)。

(c)$1.34 \times 10^3 =$ (　　　　　　　　　　　　)。

§ 13.2「1547、187、10615、117117、23562、148」

(a)上列各數中，(　　　　　　　　　　　　)是 4 的倍數。

(b)上列各數中，(　　　　　　　　　　　　)是 7 的倍數。

(c)上列各數中，(　　　　　　　　　　　　)是 11 的倍數。

§ 13.3 (a)五位數 846□4 是 12 的倍數，則□有可能是(　　　　　　　　)。

(b)有個袋子最多能裝 1000 顆糖果，如果將糖果分給 7 個人剛好可以分完，分給 13 個人也剛好可以分完，則袋子中最多有(　　　　)顆糖果。

§ 13.4 下列何者是$2^3 \times 3^2 \times 5^2 \times 13 \times 19^3$的因數:(　　　　　)。

(甲) 2^5 (乙) $2^4 \times 3^1$ (丙) $5^1 \times 7^1$ (丁) $2^2 \times 3^1 \times 19$ (戊) $2^1 \times 19^3$

(己) $2^3 \times 5^2 \times 17$

§13.5 請求出下列最大公因數:

(a)$(2^6,2^4)=($　　　　　　　$)$。

(b)$(3^2\times 5\times 23^2,2^3\times 3\times 23^3)=($　　　　　　　$)$。

(c)$(60,124,592)=($　　　　　　　$)$。

(d)$(2\times 5^2\times 7,2^2\times 5\times 7^2,2^3\times 7^3\times 11)=($　　　　　　$)$。

§13.6 請求出下列最小公倍數:

(a)$[\,3^4\times 5,2^4\times 3\times 11^2\,]=($　　　　　　　　　$)$。

(b)$[\,11^2\times 13\times 17^2,2^3\times 11\times 17^3\,]=($　　　　　　　　　　$)$。

(c)$[\,39,104,351\,]=($　　　　　　　　　$)$。

(d)$[\,2\times 5^2\times 7,2^2\times 5\times 7^2,2^3\times 7^3\times 11]=($　　　　　　　　$)$。

§13.7 (a)105 與下列(　　　　　　　　　)爲互質。

(b)下列選項中，(　　　　　　　　)是質數。

(甲)83 (乙)91 (丙)122 (丁)159 (戊)251 (己)413

§13.8 百貨公司保養品促銷廣播每 20 分鐘廣播一次，全館 85 折廣告每 12 分鐘廣播一次，鞋子促銷廣告每 36 分鐘廣播一次。早上 10 點整開始營業後，最快(　)點(　)分可以同時聽到「全館 85 折廣告」與「鞋子促銷廣告」。在(　)點(　)分最快可以同時連續聽到三則廣告。(不需考慮播放時間與播放先後等問題)

§13.9☆ (a)Find the GCF and LCM of 42 ,72,and 216?

(b)How many factors doses $5^2 \times 7^4$ have? List them.

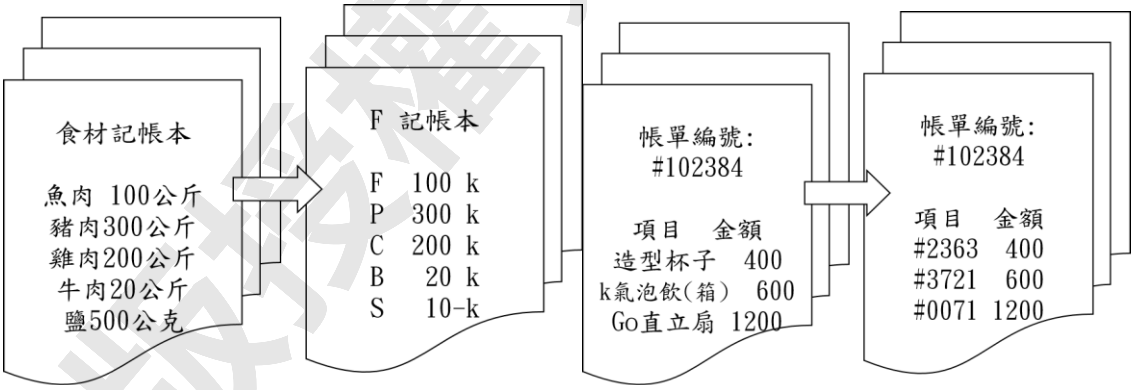
§13.10☆ A flower basket contains red, white and pink roses. Each basket will have the same quantity of the red roses, the same quantity of the white roses, and the same quantity of the pink roses. If there are 252 red roses,216 white roses and 396 pink roses available.How many flower baskets can be made? How many pink roses are in each basket?

§13.11☆ Uma,Vivian and Tina are sisters and living by themselves. Uma visits her parents every 21 days,Vivian visits her parents every 45 days,and Tina visits her parents every 30 days. They will visit their parents on the same day on March 2. What is the next day that they will visit their parents on the same day?(please Ignore leap year Days)

第 14 章 未知數、多項式、方程式

在數學學習道路上的一個重要的分水嶺，我們將數字、欲求的問題等以符號替換後，進行簡化與運算，我們則稱這類「以符號代替數字」的數學，統稱「代數」一詞。或許我們曾會聽數學老師說，數學分成三大支派:代數、分析、幾何，當中的代數就是指數學的其中一門都以符號與數字建立出數量關係、符號的運算、固定數與變動數等等，將現象轉化為數學符號與發掘問題的通解，在數學架構的建立有根深蒂固的重要性。

我們常在紀錄時，由於方便、隱私等因素，會用塗黑、挖空、以特定符號與編號等方式去取代「特定」的資料，例如下方左圖中，我們以特定的英文如食材 food 以 f 代替、魚 fish 以 F 代替，又或是如下方右圖以特定的編號代替那樣產品。



用這些「代數」代替了繁雜文字，又產生了一定程度的資訊安全的問題。那麼，另一個問題誕生了，這些「代數」在數學上又是怎樣意義的存在呢?

這個小節中將會探討「代數」的美妙之處。

a. 以符號列式(代數式)

在中文文字的使用中，有許多是已經富含數學意義的，例如: (增)多了、(減)少了、貴、長…等等。但也有比較間接表達數學概念的說法，例如:最多少於、至少大於…等等。如何將這些自然語言翻譯成「數學語言」，是這個小節中非常重要的概念。

我們一開始在使用「符號」代替文字，一定要先告訴別人，你的符號是什麼意思，數學語言是對大家溝通的語言，而不是自己對自己說的語言，你的符號只有你自己知道的話，這樣是不行的。

第一，宣告符號意義。我們習慣以「假設」、「設」、「令」字來表述我們的宣告。

第二，假設的符號，通常會以英文字母表示(圖形符號我們常用在「特殊」的計算方法上時才拿來使用，例如:$A♁B = A \times B - (A \div B)$，顯然這種符號與計算都與之前的不同，那麼我們會使用這種圖形符號。)。

要注意的是:「一個符號只能表達一個意涵，也就是要避免一個義涵用了兩個以上不同符號表示；另一方面，也避免多個符號代表同一個意涵。」

第三，將自然語言翻譯成數學語言:

「+」:「大」、「多」、「貴」、「增加」等相關字。

「−」:「小」、「少」、「便宜」、「減少」、「差」、「不足」等相關字。

「×」:「倍」、「的幾分之幾」等相關字。

「÷」:「分」、「等分」等相關字。

※但也不是絕對都是直接翻譯過去，仍然要依照整個句子意思為主。

綜合第一到第三點，我們舉些例子。

◎例如:媽媽的錢比爸爸多 20 元。

則在這個例子中，我們可以試想爸爸今天有 100 元的話，媽媽則會有 120 元。

在這個例子中，我們第一個考慮到未來列式的第一個困惑的問題，我們要假設爸爸還是媽媽呢? 其實兩者都是可以的，但是在未來應用問題時，會有解題效率上問題與列式效率問題而已，但在初學階段，我們都可以試試。

假設爸爸有 x 元，則媽媽有 x +20 元。

我們在宣告使用了一個符號 x 代表爸爸所有的錢後，要注意「單位」也要宣告，明確的告訴代表意義，不要懶惰怕寫字敘述。

宣告後，則我們可以表述媽媽的錢，媽媽都會比爸爸多 20 元，因此使用了加號。

注意這裡媽媽的錢不是使用假設、設、令的宣告詞彙。它是因為我們假設而推理出來的，我們會以「則」來說得到的結果。

爸爸有的錢 x 元，我們稱 x 為自變數(自己可以任意改變的數)，而媽媽的錢 x +20 我們則它叫應變數(隨著自變數而改變的數)，變數顧名思義即是可以改變的數，我們隨意代換有 x 時，媽媽的有 x +20 就會跟著改變。

這也是代數同時有任意代換的概念，我們像是建立的同樣的問題模型後，每個人可以依照自己的情況而得到屬於自己的結果。即是這些未知數，是為了可以帶入真實數字而準備的，這便是代數式子的真實含意。

當今天爸爸有 1000，即 $x = 1000$代入，媽媽的錢$x + 20 = 1000 + 20 = 1020$元。

代數式便可以解決這類所有的問題，當不同問題x的值代入，便可以透過代數式得到相對應的答案。

我們再嘗試將剛剛的例子，假設媽媽有 x 元。媽媽都會比爸爸多 20 元，換句話說，爸爸永遠會比媽媽少 20 元。則爸爸有 $x - 20$ 元。

我們可以看到隨著假設對象的不同，則表述會產生不同的樣子，但其實意義是一樣的。

隨著符號的引入，在過去只有數字的世界中，為了減少數學溝通上的障礙，經過數百、千年來的討論，直至今天全世界幾乎有了一致的代數表述方法。

在加法與減法的使用上，是沒有差異的，但是負數及乘法與除法上，我們要加以注意，若我們用錯了表示方法，別人也會讀錯我們的意思。

◎我們先看個例子: 媽媽的錢是爸爸的 3 倍。

假設爸爸有 x 元，則媽媽有 $x \times 3$ 元。而這個 3 倍的 x 我們也常用其他的表示法，在這裡我們介紹一種新的乘法符號「·」，以前我們我們說數字的3×5，現在起我們也可以用 $3 \cdot 5$ 來表示。則在這邊例子我們媽媽有 $x \cdot 3$ 元(或是 $3 \cdot x$ 元)，看起來式子依舊攏長一點，於是再次簡化了符號「·」，我們直接說媽媽有 $3x$ 元，以後數字與符號直接連靠在一起時，代表兩個是相乘的。

但是這樣的簡化大家有個約定，未知數符號必須要在數字的後方，例如不可這樣表示: $x3$。

我們換假設媽媽有 x 元的話，則爸爸的錢是媽媽的 $\frac{1}{3}$ 倍，則我們可以這樣表述媽媽有的錢: $\frac{1}{3}\cdot x$ 、$\frac{1}{3}x$ 、 $\frac{x}{3}$ 元。

◎除法的部分，除法符號「÷」在中學階段後已經開始漸漸不使用了，我們會直接以分數的方式表示「除」的概念，例如:$3\div 4$，則直接以 $\frac{3}{4}$ 表示。

例如:$x\div 5=\frac{x}{5}$ ，或是 $5\div x=\frac{5}{x}$(x 不為 0)。

◎在負數的部分，一樣會以小括號括起來負數的部分用來區分，例如: $-3\cdot x$ 可以以$-3x$ 表示，同時 $(-3)\,x$ 、 $-(3x)$、$(-3)\cdot x$ 也都是同樣的意思。

例如:若$x\neq 0$ 的情況下，$(-3)\div x$ 可以以 $\frac{-3}{x}$ 表示，而$-\frac{1}{x}\cdot 3$ 也是同樣的意思。

例如: $x\div(-3)$ 可以以 $\frac{x}{-3}$ 表示，同時$-\frac{x}{3}$、$\frac{-x}{3}$ 或$-\frac{1}{3}\cdot x$ 也是同樣的意思。

若有兩個未知數的情況下，也都是和上述方法一致。

例如: $x\cdot y$ 可以直接以 xy 或 yx 表示兩者相乘。

例如: x不為 0 的情況，$y\div(-x)$，則可以以$\frac{y}{-x}$ 表示，也可以以$-\frac{y}{x}$ 及$\frac{-y}{x}$ 表示。

註:雖然很多表示式在最後得到的計算結果一樣的，但在原始題目意思卻不同，在列出式子時依然要照題目所述表示，最後我們在計算結果時才改成我們需要(適合)的樣子去計算。

例如: $y\div(-x)$和$(-y)\div -x$在題目意思表述有可能不一樣的，但在代數計算的結果都是一樣的，一定要特別注意。

註:分數中的「帶分數」與未知數一齊的使用上，有一點特別注意，帶分數與未知數的乘除時，一律使用眞分數才可以省略「·」符號，例如:$1\frac{2}{5}x$，它究竟是$\frac{7}{5}x$ 還是$1 \cdot \frac{2}{5} \cdot x = \frac{2}{5}x$ 呢?

因此，帶分數的部分一定要注意化成眞分數或是假分數☆。

◎在小數與未知數符號運用上，一樣是遵循未知數連放在小數之後。

例如: $0.1x$ 、$3.25x$。

◎指數記法中我們提到同樣的數相乘可以以乘方的方式來表現，在未知數上我們依舊可以這樣使用，例如:$x \cdot x \cdot x$，我們以x^3表示。例如:$1 \div x = \frac{1}{x} = x^{-1}$ (x不為0)。

小試身手: (以未知數列式表示)

1.(1)爸爸今年x歲，爺爺比爸爸大 22 歲，則爺爺今年爲(　　　　)歲。

(2)一個三角形，底是 6，高是x公分，則面積是(　　　　)平方單位。(列式即可不用化簡)

(3)有一袋糖果共y顆，分給 12 個人，則每個人可以分到(　　　)顆。

(4)台幣 28 元可以兌換美金 1 元，則有美金y元可以兌換台幣(　　　　)元。

2.請依題意列式:(列式即可不用化簡)

(1)小黃貓和小白貓共吃了 15 公克的飼料，若小白貓吃了$2x$公克，則小黃貓則吃了(　　　　)公克的飼料。

(2)三次數學小考分別是 88、92、y分，則三次的平均是(　　　　)分。

(3)老師將一袋餅乾平均分給 30 位同學，每個人分到w塊餅乾後還剩下 12 塊，則那袋餅乾共有(　　　　　　　)塊餅乾。

(4)哥哥對弟弟說:「我身高的 $\frac{4}{5}$ 還比你多 1 公分。」

若哥哥x公分，弟弟是(　　　　　)公分。

若弟弟y公分，則哥哥是(　　　　　)公分。

3.請依題意計算下列代數式:

(1)若$x = 3$，則 $3x - 5 =$(　　　　　)。

(2)若$x = -7.2$，則 $\frac{x}{4} + (-x) =$(　　　　)。

(3)若$x = 14$，則$x^2 - x + 6 =$(　　　　)。

(4)若$x = \frac{1}{3}$，則$12xy - 15x =$(　　　　)。

(5)若$x = 1.2$、$y = 0.7$，則$\frac{(x+y)\cdot x}{2} =$(　　　　)。

4.阿勇一跳可以跳 x公分，阿松比阿勇多跳 12 公分，阿橋則是跳了$\frac{9}{10}x$公分，則:

(1)阿松跳(　　　　　)公分。

(2)阿勇比阿橋多跳了(　　　　　　)公分。

(3)若阿松跳了 172 公分，則阿勇跳(　　　　)公分，阿橋跳了(　　　　)公 分。

b. 項與一元一次式

在各種代數式中，我們給予它們表述式子的名字，以形容整個式子中的特色。

第一，未知數的多寡最常影響整個式子的變化。

第二，未知數的次方大小決定了帶值後整體大小。

根據這兩項大原則分類而訂下式子的名字，化簡後的式子若最終只有一種未知數，我們則稱一元;若有兩種不同的未知數，則稱二元。即幾「元」便是有多少種的未知數在最簡的式子中。

而式子中的各個未知數的次方中，最高次的影響整個式子常是最大的，因此我們將含有代數符號與「次數」再與上述的「元」合併，稱「□元□次式」來表示代數式。

例如:$3x+12$，稱一元一次式。

例如: $3x+x^2+12$，稱一元二次式。

例如: $3y+w+12$，稱二元一次式。

例如: $3y+x^2-2$，稱二元二次式。

例如: $3x^4-12$，稱一元四次式。

在前頭正、負數的運算的章節時，曾經說明過「項」的概念，在這邊的混未知數後，我們依舊也有項數的概念。並且我們更清楚進行分類，讓我們溝通代數式可以更清楚。

◎常數項:指代數式中沒有未知數的那一項。例如: $3x+12$中，常數項是 12。

※特別的是，若沒有常數項時，我們則說該代數式常數項是 0。

例如: $3x$，例子中它依然是一元一次式，且它的常數項是 0，因為我們將它看成$3x+0$。

◎同類項:指代數式中，相同的未知數及其次方數也都一樣，則稱這類的項是同類項。

例如: $x+1+3x$，當中 x 與 $3x$ 我們稱它們是同類項。

在學分項時，我們說明以「+ −」來進行分項的，但事實上，我們僅靠「+」來分類。例如: $x-1$，我們之前說它是兩項，而事實上我們是將-1看成$+(-1)$，如 $x+(-1)$，來進行分類的。

◎係數:未知數前方的常數，例如:$3x+1$中，x項前係數為 3。

例如:x^2-3x+1中，x項係數為-3，x^2項係數為 1。

但是要特別注意，係數和分項的原則一樣都是以「+」，

例如: $3-(-3x)$，它的 x 項係數並非是-3，而是需要將它化簡至前方運算符號為加號或最簡的式子的狀態，我們方能取它前方的數字作係數。
則 $3-(-3x)=3+3x$，它的 x 項係數而是3。

過去，我們會說「項」，用「前項」、「第一項」、「最後兩項」等來形容整個式子的某個部分，但在有未知數的代數式中，我們可以明確表達是哪個位置，如: 「x^2，x的平方項或是x的二次項」來傳達我們要表達的位置。

◎缺項:若代數式呈現高次項到常數項(又可稱零次項)中，有缺少的項，我們會說這個式子有缺項，例:x^3+x+1中，它少了x^2項，我們會說它缺了x^2項。那麼，缺項的係數又是多少呢? 我們可以這樣看: $x^3+0\cdot x^2+x+1$，和缺常數項一樣，係數都為0。

◎一元一次式，在簡化後的代數式中，若只有一種未知數，且那個未知數的次方只有一次，我們稱這種將自然語言敘述轉化成的代數式的式子叫一元一次式。

要特別注意的是，若以分數型式的代數式中，當有未知數在分母時依然要遵守分母不得為零的限制。並且因為未知數在分母，即使它次方是一次，但它仍不是一次式。在指數記法中，十分之一是記作 10 的-1次方的。因此，類如 $\frac{1}{x+1}$ 、$\frac{2}{x^2}$…等都不能列入「0元0次式」當中，我們仍以代數式稱呼它們。

小試身手:

1.下列何者爲一元一次式? (　　　　　)

(甲)$-x+4$ (乙) $2x+x^2$ (丙) $7x$ (丁) $\frac{12}{7}$ (戊) xy^2-1

(己) $\frac{1}{x}$ 。

2.(1) $32x+128$中，x項的係數是(　　　)、常數項是(　　　)。

(2)$-x+x^3-(-2)$中，x項的係數是(　　　)、常數項是(　　　)。

(3)$y^4-y^2+3y-12$中，y^3項的係數是(　　　)、常數項是(　　)。

3.請判斷下列代數式的類型:

(1)代數式 x^2-4+y^4 ，稱呼它爲(　　)元(　　)次式。

(2)代數式 x^5+x^2 ，稱呼它爲(　　)元(　　)次式。

(3)代數式 $2w^2-1$ ，稱呼它爲(　　)元(　　)次式。

(4)代數式 $5-4y+2x^2$ ，稱呼它爲(　　)元(　　)次式。

(5)代數式 $-4y+9$ ，稱呼它爲(　　)元(　　)次式。

4.請依題意列出式子:

(1)有一個圓形，半徑是 6 公分，圓周率是π，則圓面積是

(　　　　)。

(2)小山豬一秒可以跑 t公分，則 200 公尺需要(　　　　　)秒。

若小山豬提升速率後變成一秒跑 $3t+5$公尺，則 200 公尺

需要(　　　　　)秒。

C. 一元一次式的化簡

我們開始介紹代數式，舉過「假設爸爸有 x 元，則媽媽有 x +20 元。」的例子，我們再將問題繼續往後走，那爸爸和媽媽共有多少錢呢? 爸爸和媽媽都是代數式，則我們寫成 $(x)+(x+20)$將兩個式子加在一起。

同時，我們也代個例子同步比對看看，假設爸爸有 10 元，則媽媽有$(10+20)$元。

則爸爸和媽媽共有:$10+(10+20)$，我們觀察整個計算結構都是加法的情況下，透過結合律我們可以將式子變成:

$$(10+10)+20=2\cdot 10+20。$$

而爸爸有 x 元下，$x=10$代回看看，其實就是

$$2\cdot 10+20=2\,x+20。$$

我們在代數式加法與減法情況下，「同類項」才可以進行加、減法的計算，我們也觀察到未知數也像是一般數一樣，一個 x 和一個 x 成了兩個 x。

◎在數學的角度，我們是這麼看的: $x+x=1\cdot x+1\cdot x$ 我們透過逆分配律，提出x後合併兩項，

$$1\cdot x+1\cdot x=x\cdot(1+1)=2x。$$

例如: $3x+8x+x^2-1$，在這個例子中只有 x 項是可以合併的，因此其他都保留下來，將 $3x$ 與 $8x$ 合併。

則$3x+8x+x^2-1=x^2+11x-1$。

◎減法的部分，也是相同的。

例如: $13x-8x=x\cdot(13-8)=5x$。

註:在乘法「·」使用在有括號時，例如:$3\cdot(-2x)$，可以省略「·」直接以$3(-2x)$表示。在目前為止乘法的表現共有: $3\times(-2x)$、$3\cdot(-2x)$、$3(-2x)$這幾種。

在原本「假設爸爸有 x 元，則媽媽有 x +20 元。」例子中，媽媽比爸爸多了 20 元，在式子中是如何得出呢? $(x+20)-\ x=x+20-x$。一個 x 和一個$-x$ 互相消去後，剩下 20。

◎在分數的加、減計算，是很容易出現錯誤的地方。我們都知道分數的計算之前，需要經過通分的程序，將想計算的分數的分母變成一樣。接著，將分子部分進行加減計算後合併、整理。

例如: $x-\frac{x}{2}$，x 可以看成$\frac{1}{1}\cdot x$，而$\frac{1}{2}x$是分母為 2，於是我們以「2」通分，則 $x-\frac{x}{2}=\frac{2x}{2}-\frac{x}{2}=\frac{x}{2}$。

或是我們可以這樣理解，以逆分配律結合係數，

$$x-\frac{1}{2}x=\left(1-\frac{1}{2}\right)x=\frac{1}{2}x。$$

特別是分數的減法時，兩個分數相減其實彼此都是一個個體，是有括號的，例如: $\frac{1}{2}-\frac{5}{3}$，其實應該是要這要表示: $(\frac{1}{2})-(\frac{5}{3})$，但後來漸漸省略了括號，但是我們心中還是要記住每一項都是一個個體，有括號在的。

例如: $x-\frac{5-x}{3}$ 中，若我們沒注意到上述這點，以下示範錯誤的計算。

$x-\frac{5-x}{3}=\frac{x}{3}-\frac{5-x}{3}$　　先以 3 進行通分

$=\frac{x-5-x}{3}=\frac{-5}{3}$　接著，將分子的部分合併

注意到了嗎? 在$5-x$ 的部分，因為沒有將它視為一整體，

前方的減號只減到了 5。

正確的作法如右: $x-\frac{5-x}{3}=\frac{x}{3}-\frac{5-x}{3}=\frac{x-(5-x)}{3}=\frac{x-5+x}{3}=\frac{2x-5}{3}$。

註:有些人在初學時，通分完後會將分母自己移除了，通分是讓兩項的除數都一致，<u>若拿掉了除數，意義上原本要除的概念就不見了</u>。通分並不是去除分母，這個概念要先明白。

在通分時，加括號的概念也在分子需要調整時更明顯，我們再看個例子:

例如: $\frac{2-x}{2}-\frac{x-1}{3}$，拿到題目一定要稍先觀察，顯然它們需要以 2 和 3 的最小公倍數 6 進行通分，接著再進行分子的整理與合併。

則 $\frac{2-x}{2}-\frac{x-1}{3}=\frac{?}{6}-\frac{?}{6}$，我們觀察前項分子是需要整個乘上 3 倍，而後項則是整個分子乘上 2 倍。

則$\frac{2-x}{2}-\frac{x-1}{3}=\frac{3(2-x)}{6}-\frac{2(x-1)}{6}=\frac{6-3x}{6}-\frac{2x-2}{6}$ 分子整理時，整項分數是有括號在

$=\frac{6-3x-(2x-2)}{6}=\frac{6-3x-2x+2}{6}=\frac{8-5x}{6}$。

◎乘法的部分，「假設爸爸有 x 元，則媽媽有 x +20 元。」若我們試問爸爸和媽媽的錢 3 的倍是多少? 我們先列出式子:

$$[\,x+(x+20)]\cdot 3。$$

整理中括號內的式子後: $[\,x+x+20]\cdot 3=[\,2x+20\,]\cdot 3$

若整個式子整理後剩下中括號或大括號的話，可以直接將其轉為小括號。

則$[\,2x+20\,]\cdot 3=3(2x+20)$，根據分配律我們將其展開:

$3(2x+20)=3\cdot 2x+3\cdot 20$。

我們思考一下「$3\cdot 2x$」這項，它是什麼意涵呢? 有三個 $2x$ 連加，$2x+2x+2x$我們從加法中知道會得到$6x$。

在數學代數中，我們這樣解釋: $2x$ 是$2\cdot x$ 的意思(可以回想之前的說明，是$x+x$的意思)。「$3\cdot 2x$」我們可以看成$3\cdot 2\cdot x$ 的意思，都是乘法時我們可以使用結合律將 3 和 2 先併起來，$(3\cdot 2)\cdot x=6x$。

我們也個例子同步比對看看，假設爸爸有 10 元，則媽媽有$(10+20)$元。則爸爸媽媽共有:$10+(10+20)$，爸爸和媽媽的錢的三倍: $[\,10+(10+20)]\cdot 3$。

以結合律重新結合兩個 10 的部分，再以分配律展開:

$$[\,2\cdot 10+20]\cdot 3=3\cdot 2\cdot 10+3\cdot 20=6\cdot 10+60，$$

和我們代數式推導是一樣的結果。

接下來，我們一定會有下個問題，未知數可以乘上未知數嗎?

「假設爸爸有 10 元，則媽媽有$(10+20)$元。」

那　　「假設爸爸有 100 元，則媽媽有$(100+20)$元。」

或者說「假設爸爸有10^2元，則媽媽有(10^2+20)元。」

假設爸爸有10元時，$x=10$，100 元就是x^2，因此我們看到個高次方就是這樣的原因而出現，而二次方的以上的計算等我們這邊階段熟練後會再次學習。

◎除法的部分，我們在中學階段後，除法幾乎都會以乘法的角度去看它。像是:$3\div5$，我們會以$3\times\frac{1}{5}$的觀點去看。為什麼除一個數可以看成乘上它的倒數呢?

倒數，或許有些讀者還不那麼清楚它的意思，這邊重新介紹它。數字中「1」這個數字是個特別的數字，除 0 之外所有的數字與「1」相乘後，都會得到自己本身，像是:$5\cdot1=5$、$100\cdot1=100$。那怎什麼樣的兩個數相乘會得到「1」呢?

我們從$5\cdot1=5$ 例子中，利用等量公里分別在等號左右兩邊同時除上 5，因為在等號的右邊的 5 除上 5 之後必然會得到「1」，等號左邊的 5 是我們需要保留的乘數，我們於是將 5 除在 1 的上面，於是得到$5\cdot\frac{1}{5}=\frac{5}{5}$，即$5\cdot\frac{1}{5}=1$。

我們可以發現任何非 0 的整數，乘上了自己個分之一後都必然會是「1」，我們將這個自己的分之一，稱$\boxed{\text{倒數}}$。

換句話說，若x是一個非 0 的數，則$\frac{1}{x}$則稱它是x的「倒數」。

這裡x沒限制是整數，代表分數也是有倒數的，例如:$\frac{1}{5}$的倒數，我們從例子中知道它會和 5 相乘得到 1，則 5 便是它的倒數，根

據定義我們將 $\frac{1}{5}$ 帶入 $\frac{1}{x}$ 中，得到 $\frac{1}{\frac{1}{5}}$ ，它是$1 \div \frac{1}{5}$ 的意思，於是得到 $1 \cdot \frac{5}{1} = 5$。

那麼，這個倒數到底和除法之間有如何的連結呢? 回到 $3 \div 5$這個簡單的例子中，回想除 5 的概念是「分」的概念，3 個東西分給 5 個人。我們可以看成 1 個東西每個人可以得到 $\frac{1}{5}$ 個，而 3 個東西的話表示一個人可以分別拿那 3 的東西的各 $\frac{1}{5}$ 。

就是這個觀念我們得到: $3 \div 5 = 3 \times \frac{1}{5} = \frac{3}{5}$ 。

在往後的數學學習中，除法我們大多都會以分數來表示，要漸漸習慣這樣的轉變。

回到一元一次式的除法中，例子「假設爸爸有 x 元，則媽媽有 x +20 元。」，我們試問爸爸和媽媽共有多少錢的一半式多少? 在這個問題中，我們過去會將整個式子寫上「$\div 2$」，

如: $[\, x + (x + 20)] \div 2$。

而現在起我們將寫成: $[\, x + (x + 20)] \cdot \frac{1}{2}$ (或是$\frac{[\, x+(x+20)]}{2}$)。

除法問題便會回到乘法的問題，再次利用分配律展開:

$[\, x + (x + 20)] \cdot \frac{1}{2} = (2x + 20) \cdot \frac{1}{2} = 2x \cdot \frac{1}{2} + 20 \cdot \frac{1}{2} = x + 10$。

註:在除法中，若發生$x \div x$的情形時，即 $\frac{x}{x}$ 我們腦中馬上覺得它便是等於 1，一定要注意是否有$x \neq 0$的註記，未必可以直接這樣進行除法。

我們也有可能遇到 $x^2 \div x$ 的這樣情形，即 $\frac{x^2}{x}$ ，也不可直接消去一個x，而得 $\frac{x^2}{x} = \frac{x \cdot x}{x} = x$，一樣除了有零除的問題外，往後的數學中會有這部分更完整個解釋。我們現在先掌握住零除的部分即可。

◎去括號，有未知數和純數字的都是一樣。

(1)$-(-x)=x$ 。

(2) $-(x+y)=-x-y$ 、 $-(x-y)=-x+y$。

小試身手:

1.請依題意計算下列各值:(以未知數表示答案即可)

(1) $a \div b \div c =$(　　　　　)。

(2) $a \div b \times c =$(　　　　　)。

(3) $a \div (b+c) =$ (　　　　　)。

(4) $a \div 2b - c =$(　　　　　)。

2.請將下列各式中「×」、「÷」省略，並化簡:

(1) $x \times x \times x \times x \times x =$(　　　　　)。

(2) $x \times y + x \div 2 =$(　　　　)。

(3) $x \times 15 \times x \times 10 \times x \div (-3) =$(　　　　　)。

3.哥哥有 x 張卡片，弟弟則有$3x-4$張卡片。

(1)兩人共有(　　　　　　)張卡片。(請化簡列式)

(2)弟弟比哥哥多(　　　　　)張卡片。(請化簡列式)

(3)兩人平均有(　　　　　)張卡片。(請化簡列式)

(4)若哥哥有 240 張卡片，兄弟兩人平均有(　　　　　)張卡片。

4.請化簡下列各式:

(1) $3x+12-5x-27=($ $\qquad\qquad$ $)$。

(2)$(-28x)\div 7=($ $\qquad\qquad$ $)$。

(3) $\frac{3}{2}\cdot\frac{4x}{8}=($ $\qquad\qquad$ $)$。

(4) $\frac{1}{4}x-x+\frac{1}{2}x=($ $\qquad\qquad$ $)$。

(5) $3x\cdot(-5)=($ $\qquad\qquad$ $)$。

(6) $2\cdot(7-6x)-2x=($ $\qquad\qquad$ $)$。

(7)$2x-\frac{x-1}{3}=($ $\qquad\qquad$ $)$。

(8) $\frac{x-1}{2}-\frac{4-3x}{5}=($ $\qquad\qquad$ $)$。

d. 天平和方程式、(解)一元一次方程式

秤重，將一擔一擔的木材、石材、米、鹽、香料秤成一樣重的問題是交易中最重要的課題，據記載公元前約五千年，埃及人便發明類似「蹺蹺板」的等臂天平，在桿的中間設立支點，兩臂上擺放重物。若兩臂上等重時，天平產生「平衡」。

我們可以試想，當天平一端是 2 碗米，另一端是 50 克重的石頭。天平一平後，我們得知 2 碗米就是 50 克重，一碗米 25 克重。

數學中，我們有無可以描述這樣現象的東西呢? 沒錯，就是「=」等號，等號的概念便是取「相等」、「天平中的平等」的意思。

在前面例子中，我們假設一碗米是 x 克重，則天平一端是$2x$，而一端是 50 克，於是這樣表述: $2x=50$。

後來我們統一稱這種有「未知數」與「等號」的等式為「方程式」。

各類方程式就如同代數式般，我們也給方程式進行分類。

和代數式一樣，我們依照當中未知數多寡與未知數中最高次方，稱其「0元0次多項式」。

我們初學階段學的是只有一個未知數與最高次數只有一次的方程式，一元一次方程式。我們也在日常生活中的自然語言中，找到相關和等號的翻譯，雖然不是百分之百的正確，也對我們翻譯數學語言也很大的幫助，如下所示。

「=」:「為」、「是」、「比」、「共」、「和」、「剩下」等相關字。

註:很多同學對「一元一次式」、「一元一次方程式」分不清楚兩者之間的關係，兩者同樣都是一個未知數且該未知數只有一次，差別就在「等號」。有人問「一元一次式」的化簡時也出現了等號，那就成了方程式嗎? 不，一元一次式的等號左右兩邊是一樣的東西，我們透過分配律、拆括號等將它整理後變成等號的另一端的式子，但是本質上兩者是全然一樣的，這種$1 = 1$，$x = x$ 稱恆等式而非方程式。

明瞭一元一次方程式後，我們回過頭來看看我們在一元一次式中曾學過的例子:

例如:媽媽的錢比爸爸多 20 元。

我們從方程式的角度重新看過這個例子，在這個例子中有兩個在比較對象「媽媽的錢」及「爸爸的錢」，我們翻譯成數學語言:媽媽的錢=爸爸的錢+20元。翻譯完一定要確認邏輯是否正確，有時有文字上的表達並不一定能這樣直接翻譯。

若我們假設爸爸共有 x 元，則將方程式「媽媽的錢=爸爸的錢+20元」替換爸爸的錢 x 元後，得到媽媽的錢 $x+20$元。

和我們在一元一次式中用邏輯寫出爸爸及媽媽假設，是會得到一樣的結果。

我們將這個例子加以延伸，「媽媽的錢比爸爸多 20 元，若爸爸和媽媽共有 100 元，則爸爸和媽媽各有多少錢?」

我們從剛剛的練習中，假設爸爸有 x 元，則媽媽有 $x+20$元。

我們可以將假設代入「若爸爸和媽媽共有 100 元」中，則變成

$$x+(x+20)=100。$$

接著，整理一下式子: $2x+20=100$。

在國小階段我們曾學習過「等量公理」，它模擬天平上使用的一個過程。

我們試想一個情境:

古時候的人到了米店，秤了一碗的米，天平的另一端放上秤重的石子。忽然，買的人想起他需要再多買一碗的米，於是在原來平衡的天平上，秤米端再倒入了一碗的米，天平的另一端再放入等重的石子。

$\boxed{\text{等量公理}}$，即是在「已平衡」的天平上，如果左邊增加「1」，則右邊也要增加「1」，天平才會維持平衡。

在數學上，「等號」就像是天平，當我們寫出「等式」時，就像是已經平衡的天平。當你在等號的左邊增加「1」，則等號右邊也要增加「1」，才能維持天平的平衡，維持等式的相等性，我們則稱這叫等量公理。

例如:$x = y$ 我們可以想像一邊是石頭、一邊是白米在平衡的天平上，若我們增加一邊一倍的白米，則勢必另一邊也要增加一倍的石子，則表示: $x + x = y + y$，即: $2x = 2y$。

有點要特別注意:

當等號一邊「整體」做了「加 1」、「2 倍」、「除 2」等等，相對另一邊也要「整體」做一樣的事情!

例如:$x + 2 = 20$ 當等號右邊的 20 我們給它 2 倍時，是左邊「整個」給上 2 倍，即: $2 \cdot (x + 2) = 2 \cdot 20$。
並不是: $2 \cdot x + 2 = 2 \cdot 20$，要特別小心。

為一「整體」的說法，數學上表現就是括號起來:

$(x + 2) = (20)$，括號只是被省略了，這點要銘記。

我們回到一開始的問題:

$$2x + 20 = 100$$

我們想要知道是 x 是多少? 所以我們想要得到的方法，就是等號(天平)的一端只有 x 自己在，這樣一來就可以知道了。在等號左邊$2x + 20$中先將20利用等量公理處理後，再處理 $2x$ 的部分。

則 $2x + 20 = 100 \Rightarrow (2x + 20) - 20 = 100 - 20 \Rightarrow 2x = 80$

$\xRightarrow{\text{等量公理:兩邊同時除 2}} 2x = 80 \Rightarrow x = 40$，則爸爸有 40 元、媽媽有 60 元。

同時我們也稱「$x = 40$」是這個方程式的「解」(或根)。

在上面的過程中，出現了「⇒」符號，中文稱它「推論」，當方程式進行演繹時我們會使用它，不知道各位讀者有注意到了嗎?

一元一次式的代數式在計算與化簡使用的是「等號」，而方程式的推演使用的是「⇒ (推論符號)」。

或是不使用推論符號時，則可以以下方式呈現:

$2x + 20 = 100$

$2x = 80$

$x = 40$ 也可以以「換行」、對齊等號方式表現方程式的演繹計算。

以剛剛的問題，以下示範錯誤的方程式進行推演的寫法:

$$2x + 20 = 100 = 2x = 80 = x = 40$$

很多初學者會將推論符號省略、換行對齊等號等方式都省略，直接以連續的等號進行解方程式的過程，但在數學解讀式子上造成錯誤。(在上述中錯誤表示成:$2x + 20 = 2x = x = 40 = 80$)

很多初學者對於不停抄寫重複的方程式式非常煩躁的，這點真的目前無法避免，數學式的表示會因為你的省略的抄寫而整個影響意思的表示。

◎在等量公理發展中，解方程式都需要透過等量公理，計算效率差式子又攏長，於是漸漸有了等量公理的改進方法，「移項」。

在開始之前，我們一樣先看個故事:

錢幣(貨幣)的發明，使從前以物易物的交易變得更多元，公元前數百年前就有了蹤跡，兩三千年來一直至今都是人們被它們環繞著日常。

我們在一本帳本紀錄中，收入、支出、餘額的問題，困擾各個家庭、老闆。

王老闆小吃店有本帳本記錄如下:

1/19 未營業，設備購買 300000、員工薪資 2000。

1/20 營業收入 13000，購買食材 6000、員工薪資 2000。

1/21 營業收入 10500，購買食材 3800、員工薪資 2000。

1/22 未營業，購買食材 1000、機器維修 6000。

1/23 營業收入 18000，購買食材 5800、員工薪資 2000。

1/24 營業收入 11500，購買食材 5000、員工薪資 2000。

1/25 營業收入 12000，購買食材 5500、員工薪資 2000、餐具 3000。

王老闆想知道這一週店裡的營業狀況，他將這些紀錄整理成表。

日期	收入	支出	餘額
1/19	0	302000	-302000
1/20	13000	8000	-297000
1/21	10500	5800	-292300
1/22	0	7000	-299300
1/23	18000	7800	-289100
1/24	11500	7000	-284600
1/25	12000	10500	-283100

我們可以透過表格看出:

在第一天時，沒有營業且購買了設備，老闆直接負債了 30 萬又 2 千元。

第二天營業賺了(收入−支出) $13000 - 8000 = 5000$，則負債減少了 5000 變成負債 297000 元。……

老闆要想的是:如何讓收入與支出的天平可以平衡，餘額可以從負數變成正數。

餘額為 0(或稱收支平衡)，在數學上表現是什麼呢?

若 1/26 收入是 x 且當天無支出，則 $x - 283100 = 0$ 代表收入如果可以和餘額(之前的負債，餘額為負視作是之前的支出)一樣，則可以讓餘額為 0。

我們可以馬上反應出當$x = 283100$時，便是方程式的解。亦即 1/26 日若直接收入 283100 的話馬上可以收支平衡(不虧錢)。

若 100 天內營業都固定有盈餘，則每天要收入多少可達收支平衡?

則$100x - 283100 = 0$，我們馬上可以反應 $x = 2813$。

在這個收入與支出的天平中，我們思考這個左右兩邊的關係。

若我們嘗試將天平的一邊全部移到另一邊時，如何維持天平的平衡呢?

於是我們想起帳本上，若收入減去支出為 0 的話，不就是收支平衡了嗎。

若收入與支出是一樣的話，它們的比值不是 1 嗎。

我們觀察這些天平的改變，我們其實也可以移動天平兩端的物品來秤出我們要的重量。

而這個天平兩端的移動在數學發展上，造就了移項的概念。

代數(algebra)，它的前身稱「(al-jabr)移項術」，它是等量公理方法的改進。

也就是根本來說代替數字的「代數」兩字是中文的翻譯，而其在拉丁語與阿拉伯語中原指「移項」的數學技巧。

註:al-jabr 移項一詞在更早之前是由摩爾人傳入西班牙中，指外科接骨醫生或是還原的意思，後以用在數學方程式中，意指還原原來未知數的值。後來它的名字經過歲月的洗滌，後都以移項術稱呼 al-jabr，後來統一使用 algebra。

這個技巧足以被稱呼撐起數學界三大派別的名字，就知道它的重要性。

前面提到方程式的等號是天平的支點，左右兩端放置等重之物。我們在上面對收入支出的思考中，見到若移動天平一側之物到另一側，該如何調整天平的平衡。

因此，移項法則這麼說:將某一項移動至等號的另一邊時，「加、減號互換，乘除號互換」。

例如:$x+3=-2$，將正 3 移項至等號右邊時變成-3，

即: $x=-2-3$。

若在同樣例子中，若將等號右邊的-2移至等號的左方，

即: $x+3+2=0$。

例如: $2x=50$，原本是$2\cdot x$的乘 2 移項至右邊變成除 2，

即: $x=50\div 2\Rightarrow x=25$。

例如: $\frac{x}{2} = 50$，原本左邊是除 2 移項至右邊變成乘 2，

即: $x = 50 \cdot 2 \Rightarrow x = 100$。

更甚至是一個括號的項，也能進行移項。

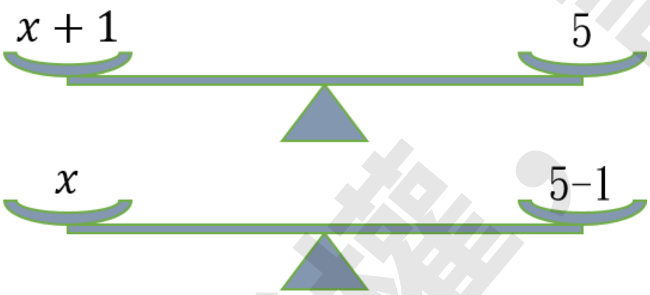
例如: $x - (x - 1) = 2$ 也可以將$(x - 1)$整個移項

$\Rightarrow x = 2 + (x - 1)$

那麼，為什麼可以這樣移項呢? 或者是問，為什麼移過去等號的另一邊後，要變號呢?

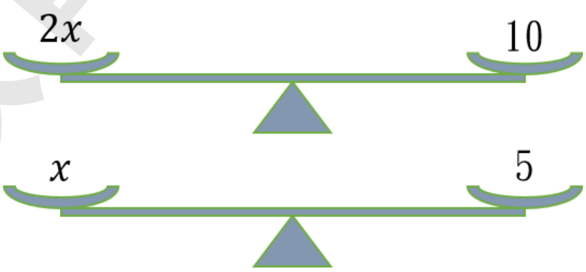
我們以等量公理重新解釋: 若平衡的天平一端是 5、而一端是$x + 1$，根據等量公理若我們將$x + 1$端減去1的話，另一端的 5 也要減去 1。

而這個過程，像是原來的+1的搬去了另一端變成了-1。



由下圖向上圖倒過來來看時，-1也會經過等號而變成了+1。

乘除法的部分:若平衡的天平一端是$2x$、一端是 10，透過等量公理我們將兩邊同時除上 2 後，便可得到$x = 5$。但我們也可以看成乘 2 移過了等號，另一邊的 10 看成了 2×5 而被除去的關聯，所以才理解成乘的過去等號變除的，除的過等號後變乘的。



除法部分，則以乘倒數的概念來看，故和乘法是一致的。

最後我們舉幾個例子實際演練一次用移項來解一元一次方程式。

例如:$4(3x-2)=8x-(2x-1)$ 1.括號部分先處理

$\Rightarrow 12x-8=8x-2x+1$ 2.有 x 的放等號一邊，常數放等號另一邊

$\Rightarrow 12x-8=6x+1$ (等號同邊能合併的同類項可先合併)

$\Rightarrow 12x-8x=1+8$ 3.解x

$\Rightarrow 4x=9$

$\Rightarrow x=\frac{9}{4}$

例如: $2x-20=\frac{1}{3}(3x-2)$

$\Rightarrow 3(2x-20)=3x-2$ 1.有分數時，不一定用分配律，可以選擇兩邊同乘去除分數，這裡等號兩邊同乘了 3。

$\Rightarrow 6x-60=3x-2$ 2.以分配律去除括號

$\Rightarrow 3x=58$ 3.將有 x 的放一邊，沒有的放一邊，解出x

$\Rightarrow x=\frac{58}{3}$

還記得我們說解決問題的模型中，一直少了最後的步驟。

最後的步驟，到底我們最後得到的$x=\square$，前面所說這是方程式的「解」，是什麼意思呢?

在方程式中，例如:$3x-5=4$，總會有一個 x，你將它代進去後，會使這個天平平衡，在這個例子中當我們以$x=1$代進方程式中，得到:

$$3\cdot 1-5=4$$

我們會發現等號左邊是$3-5=-2$，而右邊卻是 4，則$x=1$不能使這個天平平衡，所以我們說$x=1$不是它的解。

我們可以私下解出這個方程式，最後會得出$x=3$，則我們也以 $x=3$代入發現:

$$3\cdot 3-5=4$$

可以發現等號左邊和右邊都是 4，天平平衡，也就是$x=3$是這個方程式的解。

當最後解出方程式後，都要代回原來方程式中確認有無正確。

那麼，一元一次方程式的解是不是就只有一個呢? 關於這個問題，是的。我們可以將任何一元一次方程式最終都化成$ax=b$的樣子，而再將a移項變成: $x=\frac{b}{a}$。而a、b 都是固定的數，所以解只會有唯一的一個。

這邊要強調的是一定會有「解」嗎? 上述所說的解，事實上是有區分為實數解、有理數解、整數解。

註:實數(可以理解成是所有我們日常所有見得到的數都是實數)可分為有理數(可以以分數表示)與無理數，有理數則可分為整數與分數。

例如: $3x=5 \Rightarrow x=\frac{5}{3}$，則會說 x 有實數解與有 x 有有理數解，但 x 無整數解。

因此，一元一次方程式在實數中是只有一個解(實數解)的，但不一定有有理數解(例如: $x=\pi\left(\textit{圓周率}\right)$)，也不一定有整數解。

小試身手:

1.請以等量公理解下列方程式:

(1)$3x-(5x+2)=12$ (　　　　　　　　)。

(2)$4x-1=\frac{1}{2}(3x+1)$ (　　　　　　　　)。

2.請以移項法則解下列方程式:

(1)$3x-(5x+1)=2(4x+1)$ (　　　　　　　　)。

(2)$\frac{3(x-2)}{2}=1$ (　　　　　　　　)。

(3)$\frac{2}{3}(3x-4)=2(3x+2)$ (　　　　　　　　)。

(4)$2.2(x-1)=x-(3x+2)$ (　　　　　　　　)。

3.請依題意列出一元一次方程式:

(1)將 80 張卡片分給 x 人，每人平均可分得 4 張後還剩下 4 張。(　　　　　　　　)。

(2)有一盒卡片共 x 張，分給 10 位同學不夠 2 張，而分給 9 位同學則會多出 5 張。 (　　　　　　　　)。(提示:從共有多少同學思考)

4.(1)甲數的 2 倍是乙數的 5 倍少 3，若乙數是 x ，則甲數是 (　　　　　　　　)。

(2)承上題，若甲、乙兩數和是 30，則甲數是(　　　)、乙數是 (　　　　)。

e. 應用問題

在介紹一元一次方程式，我們在面對問題時，會以一套方法來面對各式各樣的問題，分別是

(1)假設 (2)列方程式 (3)解方程 (4)檢驗(驗算及確認限制條件)。

而這套方法明確來說稱為「解題的原則」、或是「解題的模型」，它用途廣泛、不一定是非常有效率的作法、執行中間也可能缺少步驟(架構不夠完整)，對於「問題」我們一定要有這樣概念，不是我們一拿到題目就開始假設、列式…，我們要多思考題目本身與其背後意義，訓練自己「解決問題」而不是「解決題目」。

儘管編者這樣批判「這樣的解題原則」，但是還是很值得推廣給大家學習。我們可以比較「科學方法」的原則:觀察、提出問題、假說、實驗、結論。

我們發現解題原則少了觀察這個項目，那麼題目的幾行文字或是只有計算的題目有什麼好觀察的呢?

觀察:

第一，我們要觀察我們要問的問題，是否清楚明白知道題目想要問的是什麼?

很多人解了半天，回頭才發現完全曲解題目的意思了，一拿到題目寧可先花一點時間仔細釐清題目要問的是什麼?

第二，題目中的條件與限制是否明確與無誤，與問題間的關聯性如何?

題目是不會錯的，這是多數人的觀點，因為是很多老師學者經過數十數百遍的檢查後產生的，但不代表我們就不進行這樣的練習。

哪天我們碰到問題時，會有很多條件等待自己去判斷有無錯誤或是能不能用(是不是夠完整)，不能依賴解題時，都是會用到的條件的觀點。

第三，觀察自己手邊的工具有哪些(這裡指腦中的知識)。

數學是科學溝通的語言，既然是語言，沒有教今天一元一次方程式，前面指數記法就不使用的道理，就像中文前面學了「爸爸」之後學了「父親」一詞，那麼之後兩個詞彙都是可以使用的。在解題開始前，我們要將以前過往所學的，像拼積木般找出幫助解題的工具(單元)給回憶起來。

第四，題目很長的話或不易理解時，應轉化題目(畫圖或是以符號簡化)的方法。第四點，應該要作為第一點的，面對我們看不太懂得題目，必須要重新以自己的語言翻譯題目。但是有些問題，我們或許是一時自己緊張才會亂了，為了避免「重讀」題目的困擾，可以簡化題目後留著待自己冷靜下來後解出。觀察題目同時，也要觀察自己的身心狀態。

假設:

第一種，是最直觀的從問題點著手，將題目所問的假設為核心的未知數(亦即題目問什麼我就假設什麼)，使固有的條件都為未知數所改寫，在當中去建立方程式找出答案。

第二種，在條件中設置核心未知數，一方面簡化條件，另一方面拼湊出問題的樣貌。

第三種，我已經大概知道答案了(範圍、可能值、甚至確定答案)的情況，我們將假設依據答案的「特性」去假設核心未知數。

實驗:

接著，我們依照題目有的條件寫出方程式，解出方程式。

結論:

判斷那個「解」是否有違背假設的設定，以及「解」是否是正確的(及有無計算錯誤)。

解完題目後，我們必須要思考這些題目，真的在日常生活中是如何存在，我們真實又會還會額外碰到怎樣的問題? 又有哪些問題是同類的呢?

接著，我們會將以前所學的十進位問題、倍數問題、百分率問題、平均問題、幾何圖形問題、速率問題等大章節，重新以一元一次式來重新檢視。

在開始之前，我們要先建立一個概念:原則上，若我們有一個未知數，是需要條件產生一個方程式來求得未知數的解。若我們假設了兩個未知數，則需要兩個條件而產生兩個方程式才會有兩個解。

◎十進位問題

例如:若有一個二位數，個位數和十位數的和是 9，個位數和十位數互換後比原來多了 9，則這個二位數是多少?

在這個問題中，我們見到有兩個條件:一個是相加的和、一個是位置互換的差，那麼如果我們直接假設 x 是個二位數，則我們條件沒辦法以 x 轉化。於是我們嘗試將未知數假設在個位數字或十位數字上。

設個位數字是x，則十位數字是$9-x$。

而這假設的二位數，十進位表示式為: $10x+(9-x)$。

而將其個位與十位數顛倒後的十進位表示為: $10(9-x)+x$。

位子互換後比原先還多 5，故可以寫成

$$10x+(9-x)+9=10(9-x)+x$$

我們將此方程式找出解: $\Rightarrow 10x+9-x+9=90-10x+x$

$$\Rightarrow 9x+18=90-9x$$

$$\Rightarrow 9x+9x=90-18$$

$$\Rightarrow 18x=72$$

$$\Rightarrow \quad x=4$$

則個位數字是 4，將$x=4$代入十進位的假設中，得到十位數字是$9-4=5$。

因此，這個二位數字是 45。

◎倍數問題

我們常碰到連續整數、連續的倍數問題。我們需要去找到這些數彼此的關係後，將其以未知數的代數式來表示。

連續整數:連續的整數，如:1、2、3、4、5⋯，若 x 是其中一個數，我們知道連續整數中一個數與下一個數都差 1，則我們會以: x、$x+1$、$x+2$、$x+3$⋯來表示。

例如:題目說有三個連續整數，我們可以以x、$x+1$、$x+2$來假設。

而這樣的假設也並非一定要這樣，我們也可以假設$x+1$、$x+2$、$x+3$。

假設也可以朝負數方向做: x、$x-1$、$x-2$，我們也常使用的是$x-1$、x、$x+1$這組，當我們三數相加時，可以消去常數項。

※沒有一定要使用哪組，可以依照題目去適當的安排，但是有一點需要注意，若題目有的限制情況下，例如:都是大於 0 的正整數，則使用假設$x-1$、x、$x+1$，則必須要有$x \geq 1$的限制。

連續偶數，2、4、6、8、10⋯它的特點都是有 2 這個因數，因此當假設有一偶數時，我們可以以 $2x$ 來假設，2、4、6、8、10⋯則可看成$2 \cdot 1$、$2 \cdot 2$、$2 \cdot 3$、$2 \cdot 4$⋯，則連續的偶數可以以$2x$、$2(x+1)$、$2(x+2)$、$2(x+3)$⋯，整理後: $2x$、$2x+2$、$2x+4$、$2x+6$⋯。

注意，有些同學直覺應該是假設$2x$、$4x$、$6x$，當$x=1$的確是對的，可是當$x=2$起就會變成 4、8、12，並非是連續偶數。

同樣地我們也可以以: $2(x-1)$、 $2x$、$2(x+1)$來假設連續三個偶數，記得要注意x的範圍限制。

連續奇數，1、3、5、7、9⋯，它的特點是什麼呢? 我們可以借用偶數的假設來假設它，因為奇數都是偶數減 1 或加 1，我們可以以$2x+1$、$2x+3$、$2x+5$、$2x+7$⋯來假設連續的奇數。連續三個奇數，也常以$2x-1$、$2x+1$、$2x+3$來表示。

連續 3 的倍數，3、6、9、12⋯，我們觀察數列之間關係:3、$3\cdot 2$、$3\cdot 3$、$3\cdot 4$⋯，和偶數有類似的規則，我們可以以$3x$、$3(x+1)$、$3(x+2)$、$3(x+3)$⋯，整理一下$3x$、$3x+3$、$3x+6$、$3x+9$⋯來假設連續 3 的倍數。

其他連續倍數，也和 2 和 3 般有類似的規則，各位讀者可以試試看尋找它們的表示法。

例如:有三個連續偶數和是 30，請問這三個連續偶數各是多少?

我們假設有連續三個偶數: $2x$、$2x+2$、$2x+4$。

則三數和$2x+2x+2+2x+4=30$

$\Rightarrow 6x+6=30$

$\Rightarrow 6x=30-6$ $\Rightarrow 6x=24$ $\Rightarrow x=4$

則三數分別是: $4\cdot 2$、$4\cdot 2+2$、$4\cdot 2+4$，為 8、10、12 三個連續整數。

我們也展示若假設為$2x-2$、$2x$、$2x+2$三個連續偶數的情形:

$2x-2+2x+2x+2=30$

$\Rightarrow 6x=30$

$\Rightarrow x=5$ 則$2\cdot 5-2$、$2\cdot 5$、$2\cdot 5+2$，三數為 8、10、12 三個連續整數。

「兩種假設方式計算結果仍是一樣的答案的。」

◎百分率問題

百分比、折扣、成數等等在一元一次方程式的問題上仍然非常廣泛，不僅日常生活，特別在未來理科上面更是數不勝數，務必要非常熟分百率的各種使用。

例如:百貨公司特價一保養品，現買就打 75 折之外再額外折 100 元，媽媽買了一瓶共付了 1580 元，請問原價多少元?

我們假設保養品一瓶 x 元，則依照題目列式:

$$x \cdot \frac{75}{100} - 100 = 1580。$$

$\Rightarrow \frac{75}{100}x = 1680$ $\Rightarrow \frac{3}{4}x = 1680$ (能約分可以先約分)

$\Rightarrow x = 1680 \cdot \frac{4}{3}$

$\Rightarrow x = 2240$ 故保養品一瓶是 2240 元。

◎平均問題

平均問題除了可以利用平均去求出缺失的某一次數值外，更有更多元的變化題型。

例如:柏元忘記了他第一次的成績，老師和說他:「第二次比第一次進步了 6 分、第三次又比第二次進步了 12 分，三次平均下來差一分就 80 分了」，則柏元第三次成績是多少分?

我們觀察三次的成績的關係，都是建立在前一次的成績上，因此我們會考慮將第一次的成績設為 x 分。第二次的分數則為$x+6$分、第三次分數$x+6+12$分。

列出平均的方程式:

$$\frac{x+(x+6)+(x+6+12)}{3}=79。$$

$$\Rightarrow \frac{3x+24}{3}=\frac{3\cdot 79}{3}$$ 整理式子，我們先將兩邊通分

$$\Rightarrow 3x+3\cdot 8=3\cdot 79$$ 等號兩邊同時乘上 3，去掉分母

(注意:很多同學在這邊搞混了一元一次方程式和一元一次式的差別，很多同學會將一元一次式給去分母)

$$\Rightarrow x+8=79$$ 也可以選擇乘開3 · 79，效率會差很多

$$\Rightarrow x=79-8$$

$$\Rightarrow x=71$$ 則三次成績分別是:71、77、89

◎幾何圖形問題

我們現階段只能處理一個未知數且它的最方次方還是 1，若求取面積、體積有些是需要未知數相乘的形情，目前是沒有辦法處理的。但是求周長和部分面積問題我們還是可以做。

例如:有一個梯形下底是$2a$公分，上底是下底的一半多 5 公分，高為 6 公分。

則它的面積以a表示式? 若$a=7$，則面積是多少平方公分。

梯形的上底則為: $\frac{2a}{2}+5$，為$a+5$

梯形面積: $\frac{(2a+a+5)6}{2}$

$=\frac{(3a+5)6}{2}$ 將分子的 6 與分母的 2 約分

$=(3a+5)3=9a+15$

所以得到梯形面積的代數表示式後，我們再將 $a=7$代入，

得到$9\cdot 7+15$，88 平方公分。

◎速率問題

例如:雨筑家和她奶奶的家一條筆直道路上，她開車一個小時半後停下，離奶奶家還有 20 公里。若她開車 1.2 個小時後停下，則離奶奶家還有 50 公里。試問雨筑家離奶奶家有多遠?

我們知道速率$=\frac{距離}{時間}$，觀察兩個條件後我們可能會假設雨筑與奶奶家的距離為 x 或是開車的速率是x。兩種讀者都可以試試看，我們這邊假設開車速率是 x km/h。(注意單位!)

則她第一次開車一小時半則是開了 1.5 小時的車，共走了$1.5x$ 公里的距離。

第二次則是$1.2x$ 公里的距離，雨筑家和奶奶家的距離是固定一樣的，則兩次距離會一樣。

列出式子: $1.5x+20=1.2x+50$

$$\Rightarrow 1.5x-1.2x=50-20$$

$$\Rightarrow 0.3x=30$$

$$\Rightarrow \frac{3}{10}x=30$$

$$\Rightarrow x=30\cdot\frac{10}{3}$$

$$\Rightarrow x=100$$

很多同學在這邊很快就會寫下答案為 100，要注意養成再確認題目要的是雨筑家和奶奶家的距離。

而$1.5x+20$、$1.2x+50$都是表示雨筑家和奶奶家的距離，則可以將$x=100$的車速，代入其中一個式子中得到

$$1.5\cdot 100+20=170\ km$$

，則雨筑家和奶奶家的距離為 170 公里。

◎若解出的未知數x，不能滿足假設或題目的要求，我們會說此題無解。

例如:有三個連續正整數和是 5。

則我們假設連續三正整數分別是: x、$x+1$、$x+2$。

則$x+x+1+x+2=5$

$\Rightarrow 3x+3=5$

$\Rightarrow x=\frac{5}{3}$ ，因為 $\frac{5}{3}$ 不是正整數，故此題無解。

(即不存在這樣三個連續正整數滿足相加為 5 的條件)

應用問題中，過去學的還有間隔問題、歲數問題、速率的水流與追趕問題等等，等待各位熟練基本題型後去挑戰它們。

小試身手:

1.有五個連續偶數，其中最大的偶數是最小的偶數的 2 倍少 4，則此五個連續偶數的總和是(　　　　)。

2.七年信班共有 35 位同學，這次數學考試中及格同學的平均是 82 分，而不及格的同學的平均是 52 分，全班平均則是 64 分，則有(　　　)位同學數學考試及格。

3.有一個三角形，底是$3x$公分、高 14 公分。它的面積比一個長 $2x$公分、長 12 公分的長方形面積少 18 平方公分，則三角形面積是(　　　)平方公分。

4.蛋糕店老闆將一個 200 元成本的蛋糕加了 3 成作爲定價，最近因爲疫情影響生意慘淡，於是老闆決定特價促銷。老闆希望依照定價打折後一個蛋糕還可以賺 21 元，則老闆該打(　　)折。

5.在滿分 100 分的數學試卷中，只有每題 2 分的選擇題和每題 3 分的填充題，若 2 分選擇題比 3 分填充題多 5 題，則每題 2 分的選擇題共(　　　)分、每題 3 分的填充題共(　　　)分。

補充:

在解方程式中，有個重要的技術，若前頭都已經熟練，還是盡早掌握比較好。它常被稱「交叉相乘」的技巧，針對一種特別的方程式: $\frac{x}{y}=\frac{a}{b}$ ，這種分數型態的方程式中，不管x、y、a、b是怎樣的型態(例如: $3x-1$ 、$7-\frac{y}{2}$)，

都可以變成 $\mathrm{b}x=ay$ 的樣子以方便解出未知數。

因為x 、b與a 、y都剛好在斜對角的位置，看起來很像一個交叉 X，故又稱交叉相乘。

那為什麼可以這樣做? 我們簡單證明它:解分數型方程式時，我們嘗試先去掉分母(不要有分數的樣子)，即兩邊可以同乘它們的公倍數。

$$\frac{x}{y}=\frac{a}{b}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{y}\cdot yb=\frac{a}{b}\cdot yb$$

$$\Rightarrow xb=ay$$

是不是很容易呢?

下面我們看幾個例子:

例如: $\frac{x}{2}=\frac{x-1}{3}$

$\Rightarrow 3x=2(x-1)\Rightarrow 3x=2x-2\Rightarrow 3x-2x=-2\Rightarrow x=-2$

例如: $\frac{x+1}{2}=\frac{\frac{x}{2}}{3}$

$\Rightarrow 3(x+1)=2(\frac{x}{2})\Rightarrow 3x+3=x\Rightarrow 3x-x=-3\Rightarrow 2x=-3$

$\Rightarrow x=-\frac{3}{2}$

例如: $\frac{1}{2}=\frac{\frac{x+1}{2}}{\frac{x-2}{4}}$

$\Rightarrow 1\cdot\frac{x-2}{4}=2(\frac{x+1}{2})\Rightarrow\frac{x-2}{4}=x+1$

$\xRightarrow{\text{在一次交叉相乘}(\frac{x+1}{1})} x-2=4(x+1)$

$\Rightarrow x-2=4x+4$

$\Rightarrow -2-4=4x-x$

$\Rightarrow 3x=-6$

$\Rightarrow x=-2$

單元練習(Exercise for section 14)

§ 14.1 請寫下下列之代數/方程式的名稱:

(a) $x+y-2$ (　　　　　　　　　　) 。

(b) $3b+2a=5$ (　　　　　　　　　　) 。

(c) $x+7=5-2x$ (　　　　　　　　　　) 。

(d) $x+x^3+2x^2$ (　　　　　　　　　　) 。

(e) $x+y^2=2$ (　　　　　　　　　　) 。

§ 14.2 請化簡下列式子:

(a) $x-(2x-2)+7x=$ (　　　　　　　　　　) 。

(b)$-(x-2)+2(7-2x)=$ (　　　　　　　　　　) 。

(c)$-x+\frac{x}{2}-\frac{3}{2}x+2x-1=$ (　　　　　　　　　　) 。

(d) $\frac{x+1}{2}-2\left(\frac{2-x}{3}\right)=$ (　　　　　　　　　　) 。

§ 14.3 請依題意列出式子:

(a)哥哥和弟弟一起存錢想買一個價值 3900 元的物品，哥哥每週固定存a元，而弟弟每週存入的錢是哥哥的 2 倍少 30 元，則需要幾週才可以購買該物品。(　　　　　　　　　　) 。

(b)有一本書共 x 頁，弟弟第一天看了 $\frac{1}{5}$ 本，第二天再看了 $\frac{2}{3}$ 本，第三天看了 56 頁後將整本書看完。(　　　　　　　　　　) 。

§ 14.4 請解下列各方程式:

(a) $13=3x-(8x-3)$ (　　　　　　　　　　) 。

(b) $x=1-(-2x-5)\cdot 4$ (　　　　　　　　　　) 。

(c) $x-\frac{x-1}{4}=\frac{x}{3}$ (　　　　　　　　　　) 。

§14.5 佩珍將一條繩子剪成兩段，長繩是短繩的 3 倍少 6 公分，若再將長繩剪一半與短繩剛好可以圍住周長 12 公分的物體，則繩子長(　　　)公分。

§14.6 有 6 個連續正奇數中，最大奇數的 4 倍數剛好是剩下 5 個的奇數總和少 3，則最小的奇數是(　　　)。

§14.7 老闆說說:「這個 85 折賣你，我還虧 100 元。賣你 9 折我才賺 60 元，比法定工資一小時 168 還少呢。」根據與老闆的對話，判斷這個商品的定價是(　　　)元、成本是(　　　)元。

§14.8☆ (a)If $\frac{2}{3}x-5=4+(1-x)$，then $x=$(　　　)。

(b)If $x=\frac{n}{2}+3$，then $6x+2=$(　　　)。

§14.9☆ Fred wants to buy 12 blue pens and 8 red pens.A blue pen is 8 dollars more expensive than a red pen.If a red pen costs x dollars. How much does Fred spend?

§14.10☆ The sum of two numbers is 18 and their difference is 6. What are the numbers?

§14.11☆ There is a car rental service charges a rental fee of \$80 plus \$5 per minute to rent a car.If Lily's total bill is \$325, how many minutes did she have the rental car?

第 15 章 圖的複製

學習的道路上，不只是寫字的速度影響了成效、考試，圖形的繪製是輔助人類解決問題重要的一環，在課業學習上我們不只複製文字，更會複製圖像化的內容，更或是我們需要放大、縮小不適合的圖形，而能不能將其「繪製」、「複製」更是我們學習道路會遇到的，譬如有的人覺得自己畫圖不好、或是無法將自己心中的概念以畫圖表現給他人看、考試時圖形想重畫卻畫不好等等，都影響對自己的自信與學習成效。

雖然在國中數學階段的圖形部分要在二年級後才會比較頻繁地出現，但是還是可以遇前學習這些知識，在其他科目中獲取繪圖的養分，在需要時才不會有「書到用時分恨少」的問題。

a. 平面圖形的複製

平面的圖形的構成，分為「直線(line)」、「曲線(curve)」構成。因此，兩種線條的練習，是基礎中的基礎。不同的筆種如:自動鉛筆、原子筆等，有著不同筆芯硬度如:2B、3B、4B 及粗細 0.4mm、0.5mm 等等，加上握筆方式及筆身設計不同，的都有著不同控制力量才可以畫出適合直線、曲線的技巧。

我們用筆撰寫文字時，因為字體常都是非常小，使用直、曲線的是非常短的，而圖形常都是比較長。

在直線的練習中，主要分「直」、「橫」、「斜」三種類型，而我們平常用的圖的大小也約莫在 6 公分×6 公分的以內，因此我們可以針對自己習慣的用筆，針對三種直線進行練習。

直線要求的是「筆直」，以不偏、不移、屏氣等速移移動動手腕及手軸(肩臂勿晃)，握筆勿過緊或太過用力，以小拇指、手掌側面作為支撐的支點(有些同學習慣以拇指及食指向筆直接施力，則支撐點直接壓在筆上，也就是寫字非常深、較用力的同學常有的現象，有寫字比較慢、繪圖直線移動比較不順的問題)。

而畫出的線條方式也可以大致劃分為兩類:

由食指、中指及大拇指握筆，小拇指與桌面輕觸的握筆方式中。

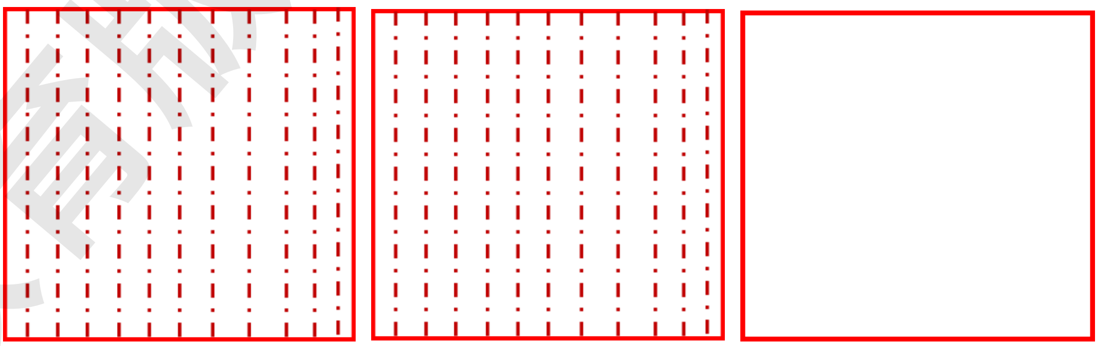
(1)直線劃出方式為「小拇指、無名指不動、由握筆的指頭移動筆」，像是在一個小範圍內寫字般，以這種方式繪畫直線是不容易拉長，適合修補、小圖的直線。

(2)第二種是相反的「握筆的三指不動下、移動支撐的無名指與小指」，適合長度比較長的直線。

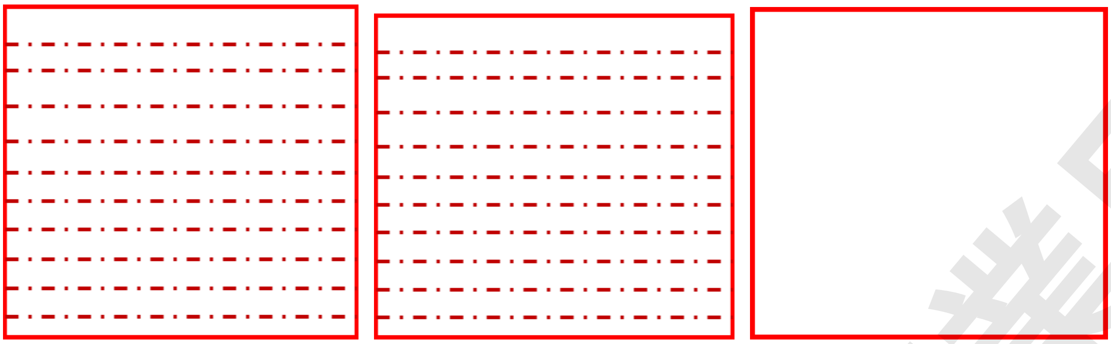
第二種是希望各位讀者空閒時可以花個幾秒鐘，靜下心就可以培養的能力。

直線: 輕握筆後(握筆姿勢完全不動、也無須晃動手腕及肩臂)，由手肘發力由上而下平移支撐的小拇指。

小試身手:

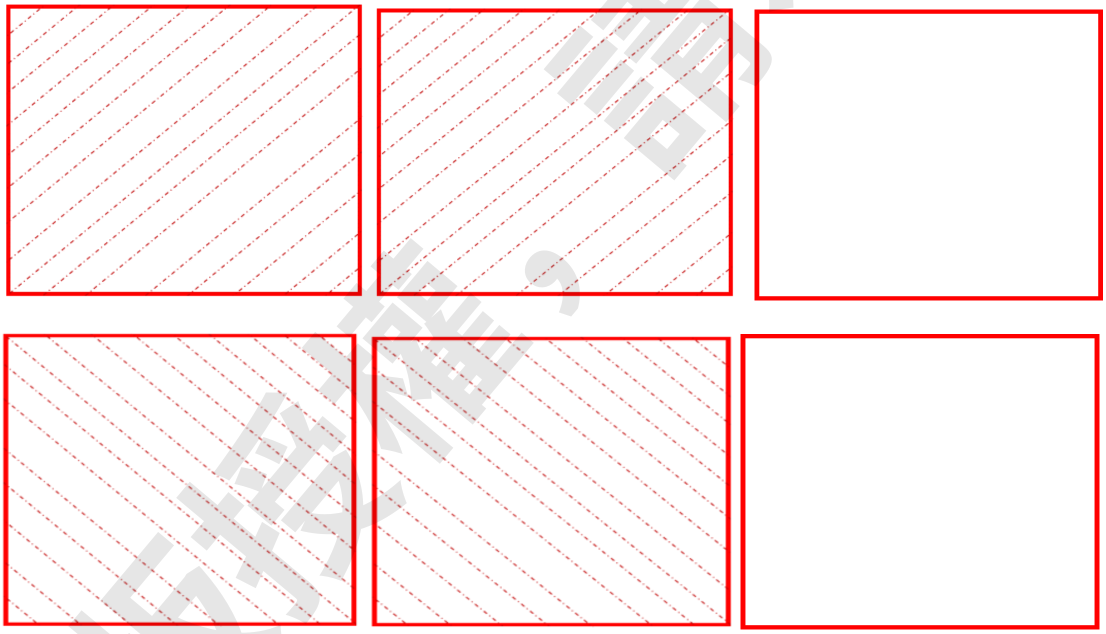


橫線:右撇子可以從左而右，左撇子可以由右而左平移畫出橫線，移動過程中保持一樣力度的控制。



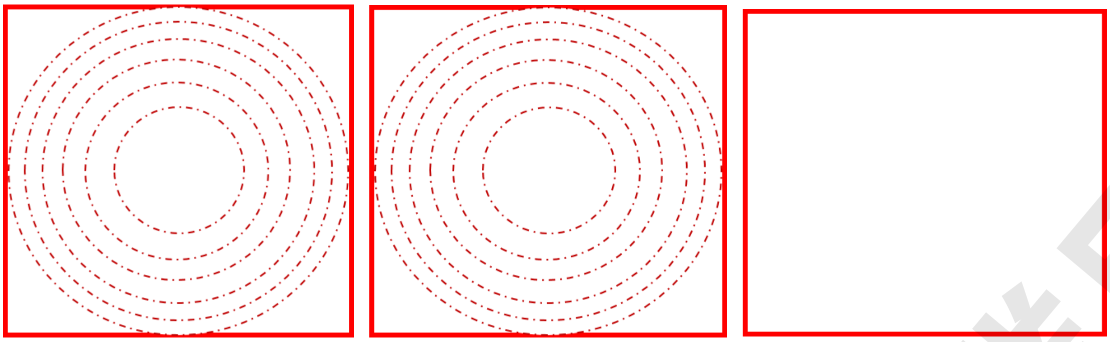
斜線:我們以練習45°角的斜直線為主，感受筆上重心的轉移與力度的控制。

小試身手:

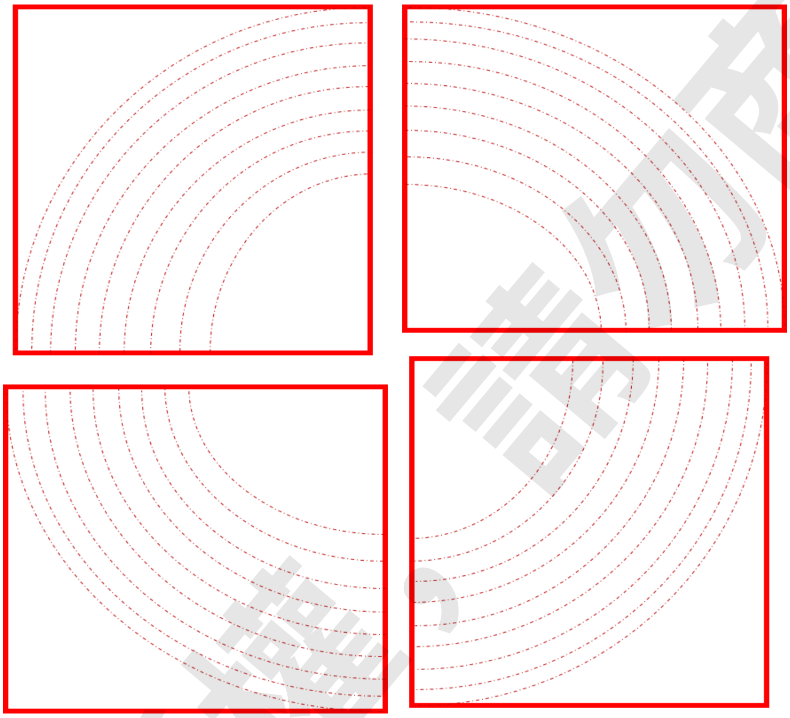


曲線的部分，依照其彎曲的變化可以成圓弧、圓、橢圓等等，畫出優美的弧線我們以圓形作爲練習的第一步，畫圓時有些人習慣順時針或是逆時針，起始點也是八個方位(東南西北，東北、西北、東南及西南)多有人有所偏好。各位讀者可以依照自己喜好練習一兩種即可。在自己畫圓時，我們會發現當快回到起始出發點時，特別容易畫歪，尤其是使用第一種畫線方式的人。

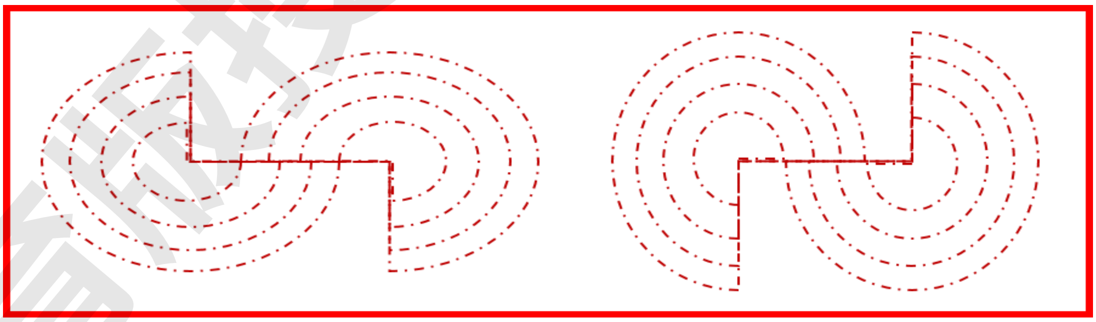
小試身手:

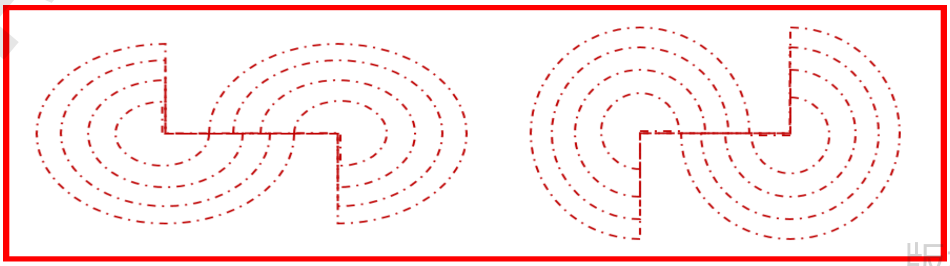


接著練習 $\frac{1}{4}$ 個圓的弧線:

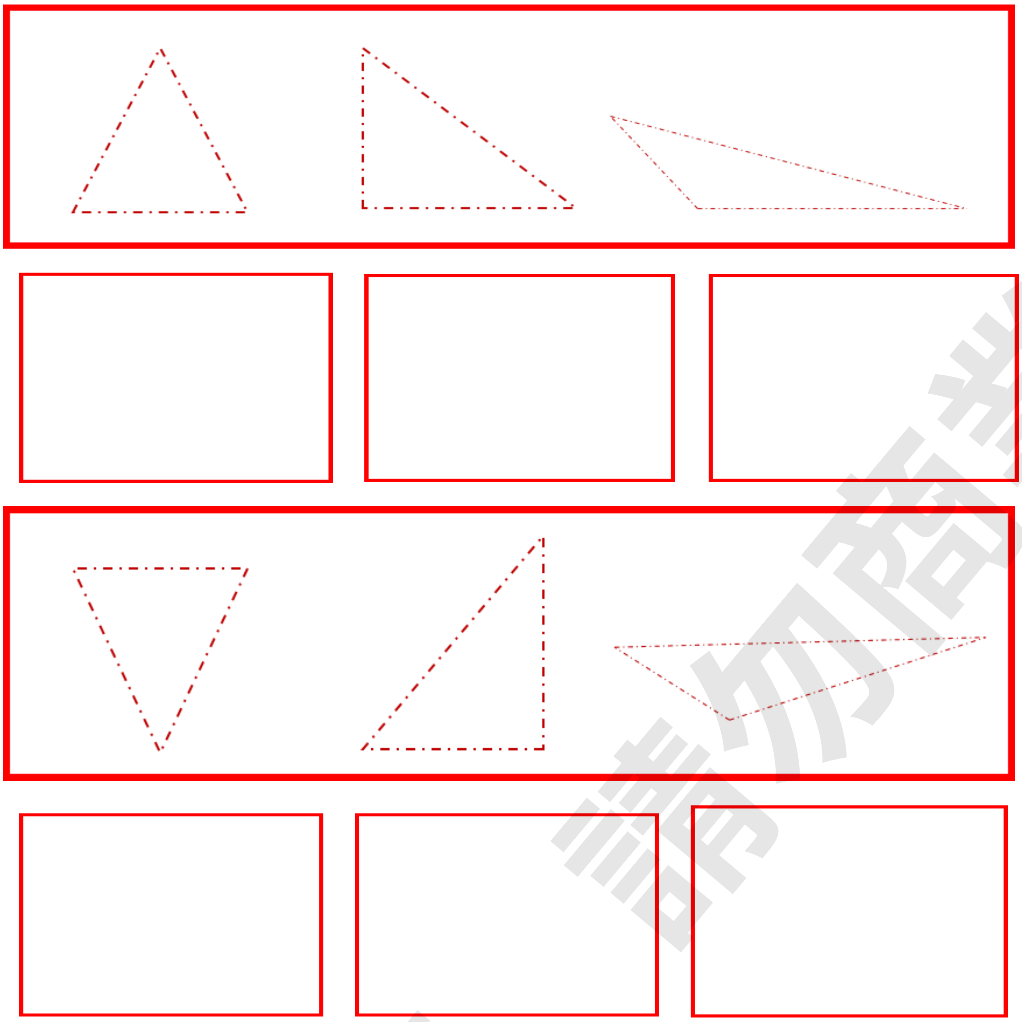


兩弧線組成的連續弧線: (波浪線(wave))





直角、鋭角、鈍角三種三角形都是直線組合:



規則圖形的複製:

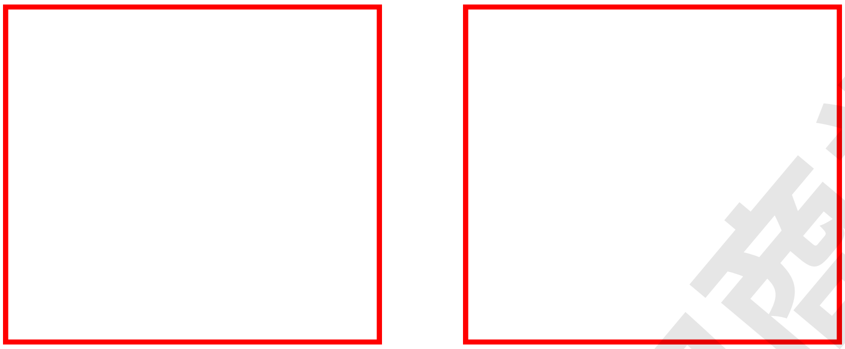
如圖，當我們要複製一個圖形時，大致上也分為兩種。一種是由圖形內部找到其中一個特徵點，如:兩線的交點、圖形的中心點、某一特別圖徵等，以其開始向外複製。另一種則為相反，框定外圍後，漸漸向內複製。

上面的左圖中，若從中心的「1」向外延伸，在沒有尺量等工具時，不易複製其外圍的大小。但反過來來看，若我們複製外框

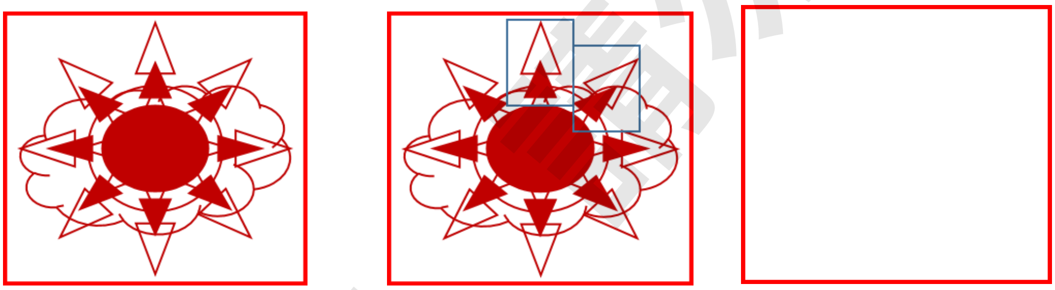
後，可以依其中點連線控制向內的圖形大小，所以選擇由外向內複製是比較好的作法。

而右圖中，則使用內向外的複製則會是比較好的選擇。

小試身手: 請複製上方圖



不規則圖形的複製:

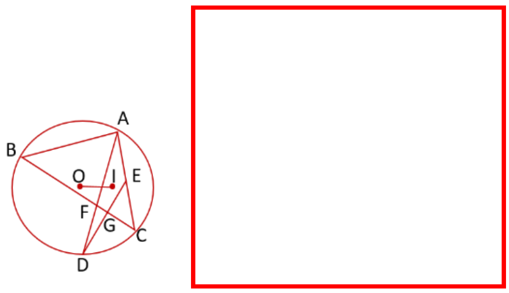


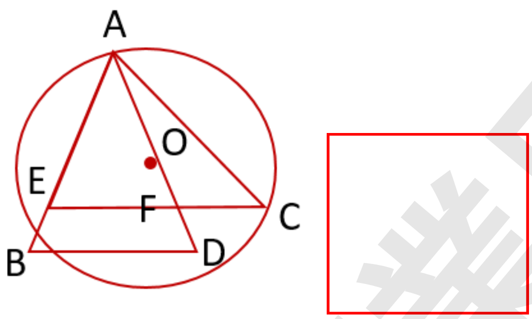
縱然我們碰到不規則的圖，我們也希望以手上有的工具先嘗試進行複製，除了前述所用的內至外或是外至內的方法外，並加上「框式構圖」的素描技巧，將整個不規則的圖形進行切割，透過框架的大小標定各個圖徵的位置。

圖的複製技巧熟練後，圖的放大與縮小是下一個目標。精準的放大/縮小 2 倍、3 倍顯然不是我們現階段目標，而是將圖可以放大或縮小至我們筆記或是考卷空白處，並且圖不失真、有效率，才是我們要掌握的目標。

小試身手:

(1)請將左圖放大至右框中。 (2)請將左圖縮小至右框中。





註:若還想挑戰更困難一些，可以搜尋關鍵字「纏繞圖」。

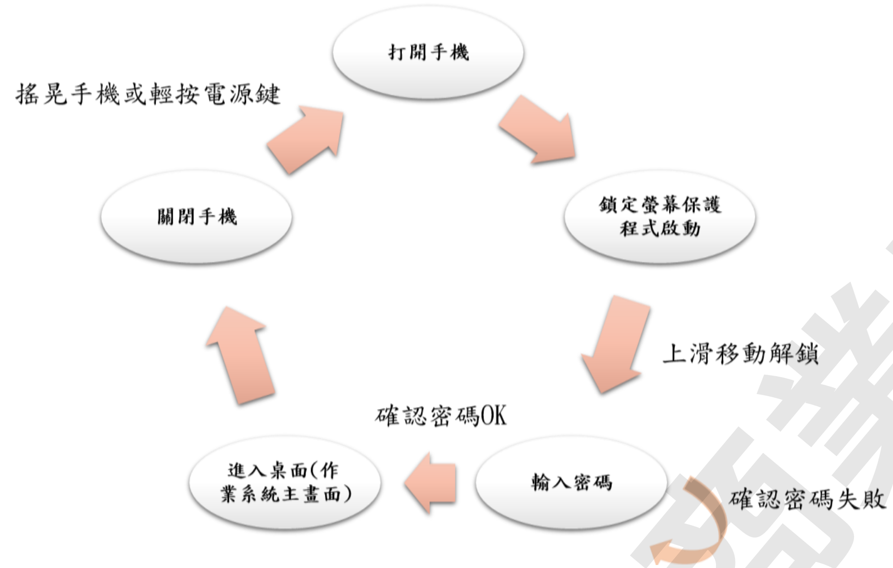
b. 資料流程圖

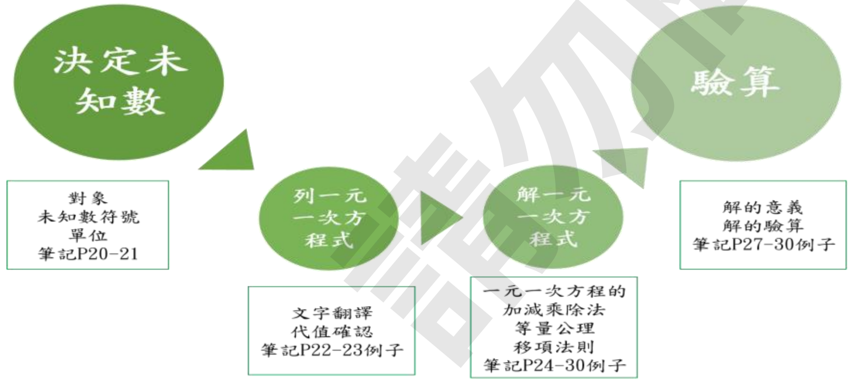
在學習、整理分析、檢討時，上課時老師講解著新的學問或許一時間無法全部吸收，我們便會整理、抄寫筆記、老師口頭補充等等。當回到家一複習時，只有一面凌亂的個體，彼此之間的關係(先後順序、關聯、對應)又是如何呢?

又或是面對問題時(檢討也是同樣的問題)，將問題加以分析或是整理時，如何以圖形化釐清之間彼此關係，一來可以使自己更清楚問題所在，一來可以有效率地告訴人這個問題的狀態。

我們介紹一種方法，稱為「資料流程模型(data-flow model)」，簡稱 DFD。我們將資料經過不同步驟的變化記錄下來後，以圖像的方式呈現出來，並整理成一個流程。

例如:打開手機、解除保護鎖定程式、輸入密碼。如下圖所示，以橢圓框表示處理步驟(的動詞)，以儲存資料(的名詞)及資料移動方向的箭頭。如下圖所示，左圖中，將手機打開的每個細節動作切割後，寫成一個流程圖。





而上圖中，則是將黑板中一元一次方程式的筆記，重新整理的示範。

因此，我們不僅可以表達出「順序」，更可以將每個步驟(事件)的屬性、特性、與其他事件的連結加以補充。我們可以透過這樣「撰寫」的動作，重新思考、重新連結所面對的學問或是問題。我們透過這個步驟，可以強化你對每一個環節的掌握，將所學的東西「內化」(轉化成自己的，可以以自己的語言表述，並用在你的處事精神、面對問題上)，「內化」開始是學習重要的課題。

註:時間軸與資料流程圖某種程度非常類似，以時間為主要強調對象時我們才使用時間軸，而強調資料不斷進行推進的過程我們則使用資料流程圖。

小試身手:

請將下列敘述轉化爲資料流程圖。

(1)安裝打開 APP 後，出現第一次使用請註冊。輸入 E-mail 後與自訂密碼後，點選下一步。填寫基本資料後點選送出，APP 要求驗證 E-mail，於是信箱收到連結，點選連結後開啟後完成註冊。

(2)請將第 12 章指數記數法以流程圖重新整理。

c. 文字轉譯圖形與表格

在之前學習代數概念時，我們簡化題目，但是我們實際上還會碰到一種情形，偌長的題目從頭讀到尾時，已經忘記前頭說了什麼了。以往很多同學反覆讀題目好幾遍後才能完全懂整個意思，非常花費時間。

對於這種比較長的題目或是講述比較複雜情形的問題，我們則可以同步翻譯、或是整理題目，更可以圖形化文字、製作成表格樣子幫助我們進行第二次、第三次閱讀。

我們比較下面三段文字:

(1)「老師告訴班上同學，這次數學考試滿分的同學老師會請吃一杯珍奶及一份雞排，而 90 分以上的同學則會有珍奶一杯，未滿 80 分的同學則下週起課後留校輔導一週，未滿 60 分的同學則下週起課後留校輔導二週。但若班平均分數贏過隔壁班則老師請全班吃披薩。若班平均全年級前三，處罰部分全部取消，而且老師一樣請全班吃披薩。但是班平均如果是全年級倒數前三，全班獎勵取消，輔導維持一樣。若這次數學考試分數比上次高 10 分以上的同學達到班上的一半的話，額外再加碼找一天全班老師請全班每人豆花一碗。」

(2)「老師告訴班上同學，

這次數學考試滿分的同學老師會請吃一杯珍奶及一份雞排，

而 90 分以上的同學則會有珍奶一杯，

未滿 80 分的同學則下週起課後留校輔導一週，

未滿 60 分的同學則下週起課後留校輔導二週。

但若班平均分數贏過隔壁班則老師請全班吃披薩。

若班平均全年級前三，處罰部分全部取消，且老師一樣請全班吃披薩。

但是班平均如果是全年級倒數前三，全班獎勵取消，輔導維持一樣。

若這次考試分數比上次高 10 分以上的同學達到班上的一半的話，額外再加碼找一天全班老師請全班每人豆花一碗。」

(3)

獎勵	
100 分	珍奶一杯、雞排一份
90~99 分	珍奶一杯
班平均高於隔壁班	全班披薩
班平均全年級前三	全班披薩、輔導取消
超過一半人數比上次成績進步 10 分以上	全班豆花
懲罰	
60~79 分	留校課後輔導一週
0~59 分	留校課後輔導二週
班平均全年級倒數前三	所有獎勵取消、輔導照舊

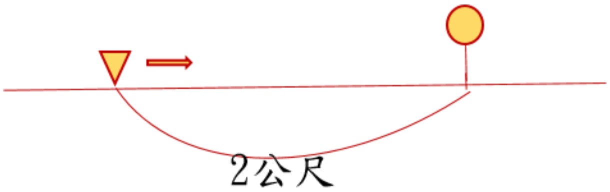
我們比較上面三種的陳述方式，文字透過排版後可以加速對其的理解，對其表格化或圖像化時，更可以幫助閱讀速度的提升。根據目前現有的資料顯示，大腦對圖像吸收速度是對純文字的 6 萬倍。

因此我們可以透過簡易的圖像、表格加以翻譯文字時，是對問題更有效率去理解其意思的方法。

註:過去曾提及一個概念，或許一個問題不是馬上可以解決時(或許十分鐘後、或許是隔天、一個星期後)(可能是時間壓力下無法完成、或是身心狀態不足以完成解決問題)，為了避免老是要重讀問題、重新理解問題，我們在第一次閱讀時做好翻譯題目的動作，我們平時就要養成這樣的習慣。

註:其實各位在過去的學習中也曾經學習過這類的知識，便是統計圖表。圖表將紛亂的數據以圖表呈現出來，並凸顯最大值、最小值、及分布情況。

例如:有一個人向右走了 2 公尺見到一棵樹。



上面例子中，用一個倒三角形代表人，以箭頭表示移動方向，以一直線與圓形代表樹，而弧線上寫上距離代表兩者間距離。

註:過去的學習中，有些同學會學習過「圈關鍵字」的方式來將整段文字凸顯出重點，以圈字、畫底線、打勾等方式加速二次閱讀的效率，但在數學問題中，時常資訊量都是非常壓縮的，也就是每一句話幾乎都是重點。這樣的情況下，使用這類方式是比較沒有效率的，頂多就是圈選出章節名稱幫助聯想的效果而已。因此圖像化、表格化的翻譯在數學問題是非常重要的練習。

表格化

當文字轉化為表格，實際上就是分類的問題，當一段敘述能夠切割成「好幾類」時候，我們就成轉化成表格。

例如:「在一個圓形操場上，以每秒 6.2 公尺的速率逆時針方式跑了三分鐘後停了下來。」在這個例子中，都是同一類的事情，不容易表格化的。

例如:「量販禮盒大特價，爸爸買了橄欖油禮盒二盒、水果禮盒三盒、鮮花 12 盆，滿 1000 送 500。」在這個例子中，不同的禮盒會有不同的價位，可能是較適合表格化的問題。

小試身手:

(1)請將下列文字圖像化。

有一圓形和一正方形重疊，正方形邊長比半徑還長，且正方形的一頂點與圓心重疊。正方形扣除重疊面積後是 x 平方公分，圓形扣除重疊面積後是 y 平方公分。

(2)請將下列文字以表格方式說明。

自來水公司因應舊水管汰除作業發布停水公告，甲區 2/1 日起，停止三日供水(共計 72 小時)，乙區 2/5 日起，停止一日供水(共計 24 小時)，丙區 2/6 日起，停止二日供水(共計 48 小時)，丁區 2/7 日停止供水一日(共計 24 小時)，2/9 日甲、乙、丙三區停止供水一日。

d. 心智圖

思考一下我們記憶的形成，當一堂課的下課鈴聲一響起，你往前思考前面 20 分鐘在上些什麼、前面 40 分鐘又學了些什麼呢? 在尚未整理的記憶中，學習是比較混亂的，在我們寫作業、複習時才慢慢重建這些記憶。那麼，如果你認真質問自己到底這 40

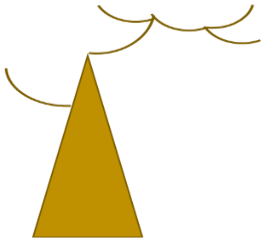
幾分鐘上了什麼? 你一定會回答「最大公因數」、「負數」、「一元一次方程式」等等這些簡單的回答。而事實上，這些就是形成記憶的「關鍵字」，當我們需要「尋找」這些記憶時(例如: 寫作業、解題)，你會脫口而出那是「最大公因數」、「負數」、「一元一次方程式」等等，透過這些關鍵字你很快會想起來那是哪時候學過、在課本的第幾頁、它該如何計算等等。

那麼，關鍵字越多，尋找記憶比較快呢? 還是關鍵字越少，尋找比較慢。很明確地，一本書中標示了書籤的、目錄越完整的，我們使用的效率就會比較快，因此建立越多的關鍵字，是可以幫助我們連結記憶與建立記憶。

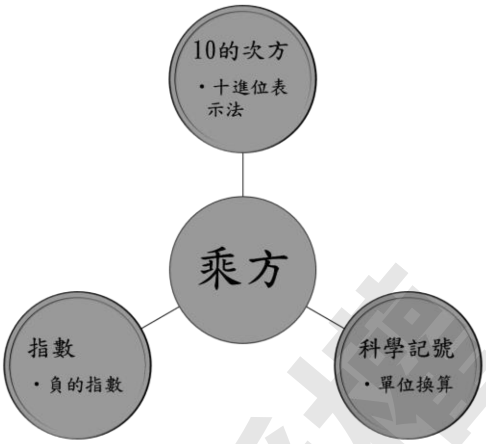
在平時的遊戲中不乏見過這樣的概念，像是聯想的遊戲。當你看見紅色，可能會想到「紅包」、「火」、「太陽」、「春聯」等等，而再繼續下去，想到「紅包」你又會想到「錢」、「爺爺奶奶」、「玩具」等等，無限地展開。

透過這些關鍵字，是可以打開你的記憶大門，相對地，這些關鍵字連結速度(馬上想到、間接想到)也都是需要平日的整理的。我們學習不能學到後面都是腦袋一片空白，失去關鍵字、失去聯想的能力。很多讀者學習時，面對問題他沒有想法，讀字時腦中沒有任何畫面，久而久之他會失去學習的熱情。

而我們的思考就如大樹般開枝散葉，在一個點往外延伸，而每一個節點不會產生一樣數量的分枝，例如:「直尺」，可能只聯想到「塑膠」、「刻度」，不會像紅色有這麼多的聯想。



於是西元 1970 年，輔助思考工具心智圖(mind map)誕生，又稱腦力激盪圖、思維地圖等，它模模仿大腦的記憶，將一個概念往外擴散的相關字詞、想法等連結起來。因此當我在讀心智圖時，順著那些關鍵字，記憶之門便會伴隨打開。



在上面的心智圖中，我們將由中心第一次延伸的稱為第一層的聯想，第一層又可以繼續延伸第二層(如右圖)，層數越多聯想到的時間越久，越不容易直接想到。我們直接反應往往都只會有第一層能想到的，第二層後都需要較長的時間去思考、回想。

註:第二層起分支同樣並沒有限制數量，範例中雖然都只有分出兩支，但其並沒限制數量。

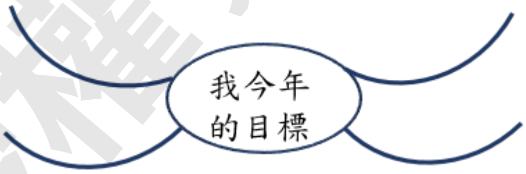
心智圖是直覺的聯想，並沒有那樣嚴謹的編制，天馬行空的想法會連接在一起，在上方右圖中，火鍋聯想有可能又與飯重疊，用它來整理學習筆記不是首善之選。

那麼，既然前面已經有了資料流程圖，我們還需要心智圖嗎? 心智圖可以用來整理想法，當我們無法整理出一套有系統的東西，心智圖可以幫助我們去尋找問題、找出自己遺忘的東西。

心智圖也用以對問題無法無從下手時，整理腦袋中的想法，將對問題的直覺、手邊的工具通通加以彙整，已找到一條可以解決問題的道路。

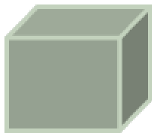
註:心智圖也常使用於背誦科目，將課文連貫的關鍵字串成一條條樹枝;也可以應用在中、英文作文寫作上的段落安排，增加作文列舉廣度，或是整理自己習慣的呈現方式加以修正。

小試身手: 請以「我今年的目標」為主題，繪製出至少 3 階層的心智圖。



e. 立體圖形繪製

立體圖形的繪製，主要都是在「柱體」、「錐體」二者再去延伸的。當我們清楚這兩種立體圖形繪製技巧後，其他變化或不規則柱體多是兩種畫法的延伸。

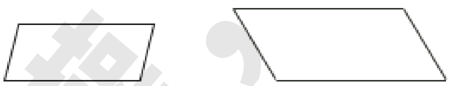


立體圖形，以正方體來說，當我們與一面來看，在一個角度上是見不到其他面的，或是只會見到兩面。如:  。

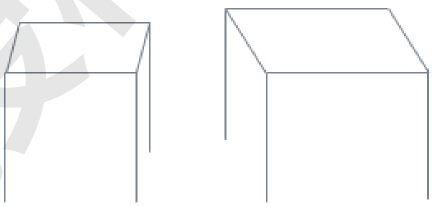
若是我們在紙面上這樣方式呈現一、二面，會被誤認為平面圖形。因此，立體圖形要以三個面來展示。

我們仔細拿起正方體觀察在眼中可以呈現三面的角度，正方體的上方面在眼中並非正方形，而是呈現平行四邊形、菱形的樣子。

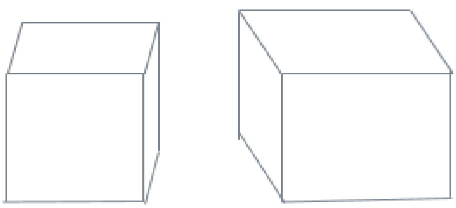
我們在畫正方體或是長方體時的第一步驟，先是決定上底面。



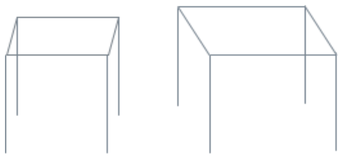
第二步驟，將頂點往下垂直延伸。



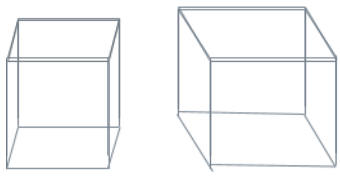
將著，只要將底面連接起來，正方體或長方體就完成了。



若我們想要畫「透視」型的正方體時，只要在步驟二的每個頂點都拉下直線。

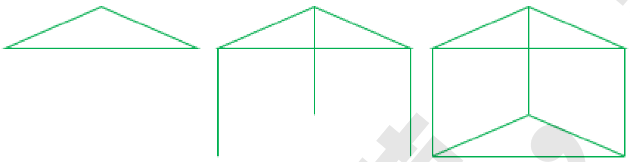


接著，一樣連結底線後，便完成了。

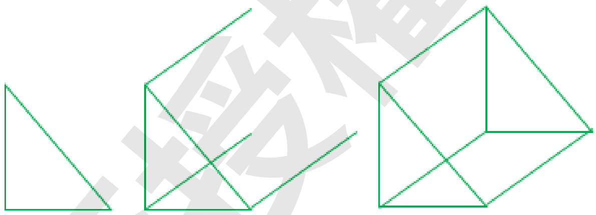


小試身手

三角柱、五角柱等角柱都可以依照相同的模式，觀察底面在眼中的樣子，沿頂點往下拉線後後，將底部連結起來。

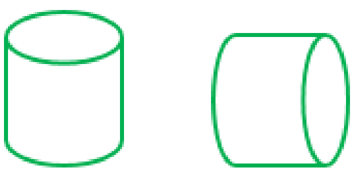


小試身手

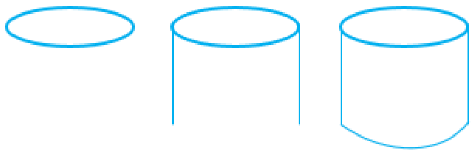


小試身手

至於圓柱的部分，我們將圓柱以眼睛平視，觀察其底面是橢圓形狀的。

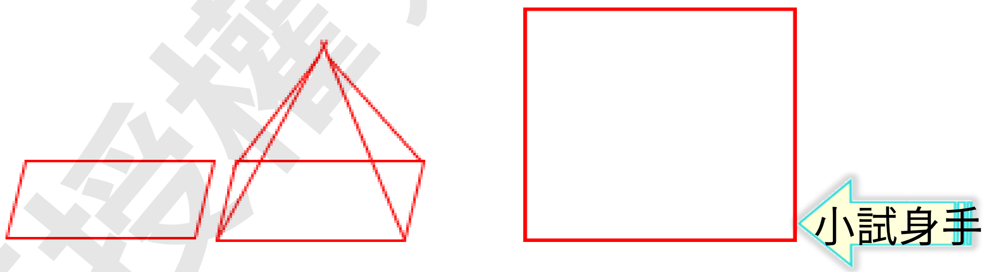


第一步驟，我們一樣先畫上底面橢圓，接著在橢圓兩側最外處往下延伸直線，再以相同弧度弧線連接兩線。

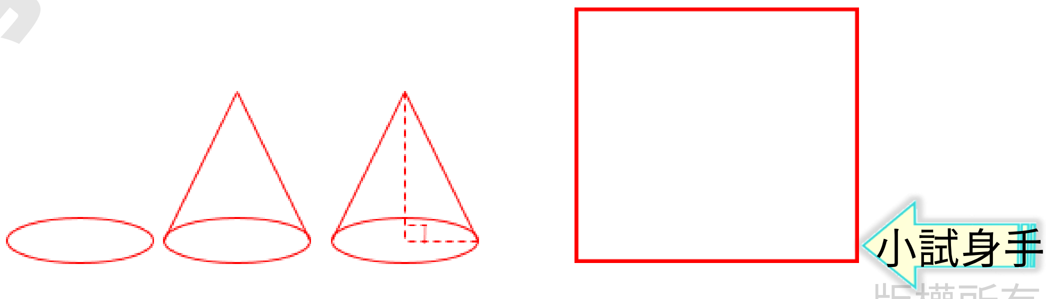


若是透視的圓柱，我們則在兩直線延伸下來後，將底面以相同的橢圓畫上。

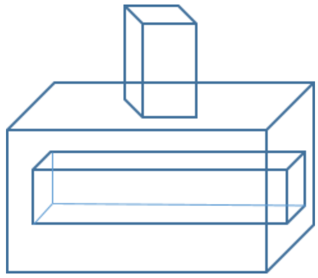
錐體部分，也是由底面畫起，沿著底面的頂點向頂部的頂點拉線。

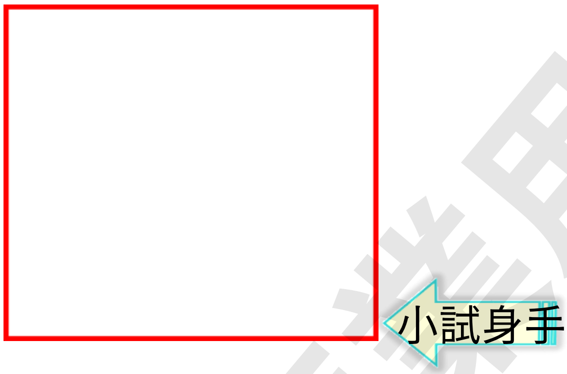


圓錐，將底面的橢圓畫出後將橢圓最兩側拉線至頂點處，我們在錐體的圖形上常習慣以虛線畫上垂直的記號。



在學會基本的繪製立體圖形後，過去所學的複合型的立體圖形，將兩種柱體以堆疊或是挖空等方式成型，也可以嘗試看看。





在這個章節中，我們學習繪圖的基本技巧，對學習、解題、筆記的整理等等都有實質上的效益。我們也學習了整理筆記、題目等流程圖與心智圖及圖表轉換，都是將所學「內化」重要的工具，幫助我們思考及提升學習效率，非常這些都是考試不強調的東西，卻是可以使用一輩子的工具，希望帶給讀者更多啟發。

註:這些介紹的工具、繪圖技巧都是比較基層的，有興趣的同學可以自行更深入研究。

第 16 章 綜合訓練

在本書的最後，很多同學其實還迷迷糊糊的準備就讀國中的路上與沉浸在開心的漫長暑假中時，不管他們是自己發自內心、還是家長的要求，他們在暗中經歷過音樂班、美術班、資優班、私校入學等的考試，這些考試中的內容與課內的學習不太一樣，它包含這些「觀察力、敏捷的反應、正確的記憶、精確的判斷、分析與推理、組織與解決問題…等等」，而這些能力在沒有後天課業學習影響的話，這些能力真正的水平在哪裡? 很多學校並以此為重要的參考依據(甚至工作)，我們簡稱這種測驗為「智力測驗(intelligence test(IQ test))」。在這個章節中，會結合智力測驗相同的概念，更認識自己，強化自己不足的地方。

a. 關鍵字訓練

我們常在聆聽、閱讀一長串文字時，沒辦法一次性記住，我們會切這長串文字中切成一段段後，將其中特別可以代表該段意義的(稱其為「關鍵字(keyword)」)字詞而記在腦海中，形成我們的工作記憶。也因此抓取關鍵字的能力對於訊息的掌握是極其重要的，這些關鍵字也將是我們理解的方向所在，以下我們就針對關鍵字在中文中容易產生的問題進行討論。

去贅字

贅字(pleonasm)使用中文時常會在字詞的附近，增加一些同義或是無義等比較委婉的用字，稱其前、中、後綴字，或稱冗詞(語病的一種)，例如:我是家中唯一一個不會畫圖的，唯一已經代表只有一個，而後頭又在說了一次一個重複意義的詞。贅字的判斷是我們首先要知道的一件事情，使用贅字在閱讀、學習、筆記上都常會造成理解效率的降低，但是說話的藝術中它是很重要的呢!

小試身手:

請將下列句子中產生贅字的部分畫上底線:

(1)新娘化過妝後，與新郎挽著手緩緩步行走了出來。

(2)山中瞬間狂風暴雨、大小土石不停滾下，宛如像世界末日。

(3)若不是沒有讀書的規劃，這次也不至於會考不好。

(4)若一直不斷地練習題目，或許可能可以提高下次考試的分數。

(5)因應防疫期間，入店內請配合實施防疫措施、並保持好社交距離。

(6)國一數學中負數的逆結合律，常是大家老是搞錯的地方。

(7)三角形的面積，是將它的底乘上那個底面上的高後除二。

(8)這次考試大多數人的成績大約是在 75 分左右。

(9)我們學習的目的是爲了自己本身。

(10)許許多多的群衆聚集在廣場，大聲呼喊著他們的訴求。

(11)總是在考試前才準備考試，這是一種很不好的壞習慣。

(12)感謝各位顧客的支持，即日起凡在本店消費購買超過千元以上者，贈送精美小提袋乙個，送完爲止。

(13)有教授對現在的中學數學教育發表看法:「我們現在的數學教育，弄得太過複雜困難。不談定理原來的發明，反而去講證明；不談現實發生的案例，反而練習很多各式各樣的題目，對這樣的課程內容讓更多孩子越來越討厭數學了。」

(14)計算機、計算機應用程式(APP)的使用讓我們對於一些計算得以加速，也因此讓一些不喜歡數學的人有了再次學習的機會。但是由於計算機對於分數、大數字、概數等的限制，我們要清楚地知道不能全靠計算機，而不都自己動筆。

(15)學習從模仿開始，然後能以自己的話精準表達出來，但在那之前也要先經過很多次的修正與練習。

(16)動機，指使個體推動朝某一目的進行的心理活動，它可以分爲內在動機與外在動機兩種類。內在動機，例如:想要被人肯定、成就感、挑戰性、興趣等；外在動機，例如:金錢、脅迫、處罰、人際關係、地位等。若滿足內在動機，則動機也不會再增加，若不滿足內在動機，則動機便會減少；但是若提升外在動機，則動機是會增加。

關鍵字

關鍵字，指在話語當中的部分字詞，能夠快速使人記憶起完整話語，稱這類的字詞為關鍵字。

例如:幾十分鐘的演講，台下聽眾一片昏沉，當講者一說:「我們現在來個有獎徵答。」，忽然大家都醒來了。「有獎徵答」是大家都很注意的「關鍵字」，這些字詞常有特別的涵義，整句話、整段話會以它為中心展開。

又例如爸爸說:「你上次考試也考太差了，這次平均有 80 分的話，我們就出去玩。」，我們可以知道關鍵字是平均 80 分、出去玩。由這個例子中，我們也知道每個人的「關鍵字」是會不太一樣的，對另一個陌生人(第三人視角)來看，關鍵字還會有「上次的成績考差」這項關鍵字。

關鍵字，也可以有優先順序的概念，即最重要的、次重要的、第三重要的，或是都很重要都不可少的。

小試身手:

請將下列敘述中的關鍵字圈出:(括號內爲關鍵字的數量)

(1)如圖(七)，下列何者何者爲非? (2 個)

(2)絕對值 小於 5 的整數共有幾個? (3 個)

(3)那麼，則表示甲的位置在數線上何處位置? (2 個)

(4)有一客人向老闆說道:「老闆，我想買頂帽子，冬天可以戴的、類似漁夫帽那種。我想要針織款單色系的，價位在一千到二千左右，不知道有沒有?」(5 個)

(5)活動辦法:購票後(不含購票當日)三日內得退票，第四日起即不接受退票之申請。(1 個)

(6)大大愛心基金會長期關懷弱勢，今年因爲疫情的關係，許多社會福利機構團體收到的愛心捐款都比較少，邀請大家認購愛心餐點，希望給更多長輩有一頓熱騰騰的湯飯。(1 個)

(7)親愛的客戶您好，提醒您近期發生多起以本公司名義致電詐騙案件。本公司在網路上一切交易皆以網站、電子信箱爲主，不會致電與發送簡訊，請勿點選可疑連結登入，以免造成個資外洩。(2 個)

(8)感謝您對大清早早餐的長期支持與愛戴，由於各類物價上漲、成本的壓力下， 2/1 日起本店吐司類早餐全面調漲 5 元，其他暫時不異動。本店秉持用最好的食材與品質，提供大家一份美味、健康的早餐。(1 個)

(9)配合供電設備維護，於 1/1(六)06:00-20:00 暫停服務。最新消息敬請鎖定粉絲專頁，造成不便，敬請見諒。(2 個)

(10)Jinna 博士多年研究發現有一種細菌每 5 分鐘會分裂成 2 個，若在培養空間中放入 2 個細菌，則一個小時後會有多少個細菌?(3 個)

(11)鈍角三角形是三角形的一種，它其中一角大於90°，其餘兩角都小於90°。(2 個)

(12)品牌是一種複雜的概念，它是產品的一個名稱、符號、圖像設計、術語或上述的組合，用來強化銷售產品的特色，使消費者可以與其他競爭者的產品進行區隔。(5 個)

連結(link)(recombination)

將破碎的句子依邏輯、語意還原回原來的句子，在還原時考驗我們對於句子上、下間的關係、語意轉折的判斷能力。

小試身手: 請判斷下列敘述，何者並非是同一句的句子。

(1)(　　)(A)美麗的夜晚(B)伸長了脖子(C)蝴蝶在花朵間穿梭(D)只剩下。

(2)(　　)(A)在山中若是遇見另一個旅客(B)眞正的伴侶是很難遇到的(C)旅途中常常是枯寂的(D)在溫哥華旅行中遇到的老人告訴我。

(3)(　　)(A)在風吹日曬中(B)漸漸化作棕色瀝青(C)的義工們(D)路邊的一截枯木。

(4)(　　)(A)平均每一秒(B)被稱爲地球之肺的熱帶雨林(C)就會有一個足球大小的森林遭到砍伐(D)世界共同的隱憂。

(5)(　　)(A)本帳戶各項金額(B)本收據(C)以便日後查考(D)請妥爲保管。

(6)(　　)(A)說故事的技巧(B)不同於(C)這部電影(D)原來小說的劇情。

(7)(　　)(A)應該堅守原則(B)但也不要畫地自限(C)失敗者(D)一個人立身處世。

(8)(　　)(A)但可以選擇活出自己的樣子(B)人不能選擇(C)個性(D)自己的出生。

(9)(　　)(A)就像肌肉(B)透過鍛鍊才能強韌(C)人的能力(D)便會退化。

(10)(　　)(A)那歲月(B)櫛風沐雨(C)煙霧濛濛中(D)我們站在草原上。

(11)(　　)(A)這家餐廳(B)走了進去(C)門口總是(D)大排長龍。

(12)(　　)(A)他的小手緊握著盒子(B)當日早晨(C)在我一生中(D)我蹲在地上看著。

(13)(　　)(A)長繩比短繩長 5 公分(B)有一繩子長x公分(C)折成相等四段長後(D)將其剪成兩段。

(14)(　　)(A)從左右兩邊(B)某一道路長 40 公里(C)的速率行駛 5 分鐘的話(D)若以秒速 5 公尺。

(15)(　　)(A)的光明(B)是可以拯救全體船員的小艇(C)擁有信念(D)信念是克服驚慌。

類比(之於)(analogy)

數學中「比與比例」就是文字中「聯想(association of ideas)」的具體實現，透過兩物體間的關聯，例如:「大小、遠近、輕重」等，將兩者的相似、相反等概念表現出來。

小試身手:

請依每組語文前後呼應關係，選出適合的答案:

(1)(　　)前進:後退=北方:______ (A)東方(B)西方(C)南方(D)北方。

(2)(　　)過去:未來=______:預言 (A)巫術(B)傳說(C)預告(D)昨日。

(3)(　　)校長:學校=______:國家 (A)人民(B)行政院長(C)總統(D)首都。

(4)(　　)長度:重量=______:公斤 (A)公尺(B)平方公分(C)毫升(D)距離。

(5)(　　)囚犯:監獄=醫生: ______ (A)手術(B)醫院(C)護理師(D)院長。

(6)(　　)______:科舉考試 =冠軍:比賽 (A)秀才(B)探花(C)榜眼(D)狀元。

(7)(　　)音樂:______ =數學:科學(A)美術(B)歌唱(C)音符(D)藝術。

(8)(　　)一見如故:素不相識=三心兩意: ______ (A)心不在焉(B)堆金積玉(C)一念之差(D)專心會神。

(9)(　　)百無一用:價值連城=______:無價之寶 (A)功成身退(B)一文不值(C)稀世珍寶(D)無本之木。

(10)(　　)其貌不揚:______ =不分軒輕:天差地遠 (A)英姿煥發(B)才疏學淺(C)獐頭鼠目(D)郎才女貌。

(11)( )制服:______ = ______:和尚

(A)警察…寺廟(B)學校…佛教

(C)保守…素食(D)學生…袈裟。

(12)( ) 鉛筆:______ = ______:茶壺

(A)原子筆…茶葉(B)橡皮擦…杯子

(C)鉛筆盒…(D)文具…茶桌。

(13)( ) ______之餘教師節，好像聖誕節之餘______

(A)中華文化復興節…國父誕辰紀念日

(B)孔子誕辰紀念日…公共服務日

(C)孔子誕辰紀念日…行憲紀念日

(D)解嚴紀念日…臺灣光復節。

(14)( ) ______之餘玉山，好像地球之餘______

(A)中央山脈…喜馬拉雅山(B)新疆…聖母峰

(C)高度…太陽系(D)台灣…珠穆朗瑪峰。

(15)( ) ______之餘紅包，好像萬聖節之餘______

(A)錢…南瓜(B)新年…西方世界

(C)農曆新年…糖果(D)紅色…黑色。

(16)( ) ______之餘烤箱，好像白米之餘______

(A)烤雞…糯米(B)蛋糕…電鍋

(C)氣炸鍋…紅豆(D)廚具…穀類。

(17)( ) ______之餘樹木，好像音符之餘______

(A)太陽光…五線譜(B)水…樂器

(C)鋸子…休止符(D)葉子…歌曲。

(18)(　　) ______之餘公斤，好像公分之餘______

(A)毫升…公里(B)公噸…公尺

(C)公里…毫升(D)公克…公厘。

(19)(　　) ______之餘雪，好像七月之餘______

(A)一月…西瓜(B)十二月…海邊

(C)十二月…豔陽(D)十一月…暑假。

(20)(　　) ______之餘屈原，好像月餅之餘______

(A)划龍舟…賞月(B)粽子…嫦娥

(C)端午…中秋(D)戰國…元朝。

(21)(　　) ______之餘打擊樂器，好像絃樂器之餘______

(A)樂器…樂隊(B)鼓…小提琴

(C)吉他…鋼琴(D)西方…東方。

(22)(　　) ______之餘天長地久，好像堅定不移之餘______

(A)時時刻刻…臨危不懼(B)愛情…承諾

(C)海誓山盟…喜新厭舊(D)稍縱即逝…舉棋不定。

(23)(　　) ______之餘密碼，好像鎖之餘______

(A)保護…安全(B)萬全之策…遮天蓋地

(C)帳號…鑰匙(D)漏洞百出…計出萬全。

(24)(　　) ______之餘知人知面不知心，好像君子之餘______

(A)畫龍畫虎難畫骨…仁德(B)鏡子…江山易改，本性難移

(C)小人…君子一言，駟馬難追(D)小人…江湖險惡。

b. 強記訓練(super memory)

記憶，分成短期、與長期記憶，長期記憶(long-term memory)經過精簡、整理、多次的測試後存放起來，使你可以經過長時間依然可以很快地想起來。而短期記憶(short-term memory)，指得是短時間內的記憶，沒多久就可能遺忘。在學習的知識尚未成為長期記憶時，它大部分都是以短期記憶存在。因此，短期記憶的能力往往也決定學習好壞的關鍵。

事實上，現在很多人都很難聽一次就可以複誦別人的話語，也不容易看到一行字後，馬上就可以完整重複說一次給人聽。若不信可以將第一段唸誦一次後，嘗試重複講述一次(rehearsal)。

我們的眼、耳、鼻、舌、身上的各種受器，會不停地因為外在刺激而形成感官記憶(sensory memory)，經過大腦判斷成為一個有意識的短期記憶，並經過判斷轉化成暫時保存的工作記憶(working memory)，工作記憶的形成對於推理與決策行為有很大的影響。

例如:眼睛看到紙上一組電話(感官記憶)→覺得這組電話很像在哪看過(短期記憶)→複誦幾次背起來電話(工作記憶(短期記憶))→原來是爺爺家電話，撥打時可以清楚記得號碼，後來甚至不下意識就可以撥出了電話(長期記憶)。

學習中，別人的講述我們真的記得多少呢? 很多人學習的過程中，透過將這些知識在自己學習狀況不佳時，以工作記憶的方式「強記」下來，等到自己再次學習時才重新整理，使其慢慢變為長期記憶。

因為存放短期記憶的空間是非常有限的，常常我們見到學習一下就再也記不住了，頭痛現象便與之隨來，因此我們時常透過抄寫來改善這樣的情況。還好記憶這是可以訓練的，背誦是枯燥乏味的一件事，但也是其訓練的一個方法。透過複誦、分段、結合生活經驗、關鍵字等，增加我們背誦能力的同時短期記憶的能力也會隨之提升。

在數學的學習中(ch10 會提及的問題)，決定計算速度的基礎運算，我們正好一齊訓練這個問題。

在基礎的計算中，在小學階段中以「9×9 乘法」與「100、1000 的減法」最為重要。中學階段起，加上「30 內的平方數」、「2、3、5 的指數」、「常見分數與小數的轉換」、「12 至 19 的乘法」都是基礎計算能力的範圍，這部分的速度、準確性的差異，往往有分數決定性的差異，因此我們試著強記起來，並讓它長存在長期記憶中。

註:或許有人會問為什麼這些東西，明明使用計算機或是紙筆就可以算出來的東，卻要背起來呢? 因為這些計算使用計算機或是用紙筆去計算的效率是比較差的，計算機壓了數字、乘法、數字、最後再壓上等於鍵，或是紙筆上寫上數字、下方數字、畫上乘號與一直線，最後計算出結果，兩者的速度遠遠低於直接背起來的速度。不知道你有觀察到像是三位數或是三數連乘，並沒有在背誦之中，因為計算機的效率是比較高的，且你在計算三位數紙本計算上仍會用到這些基礎的計算。而這些累積的時間差距，將決定一場考試中你可以思考的時間有多少。

◎「9×9 內的乘法」是所有計算中最重要的，快來檢視自己是否足夠熟練了！

小試身手:

下列是「9×9 內的乘法」，請在 2 分鐘內完成，並正確率 100%。

partI:

分數:____/60，正確率:______%。

(1)$4 \times 5 = (\quad)$ (2)$2 \times 6 = (\quad)$ (3)$6 \times 4 = (\quad)$ (4)$5 \times 5 = (\quad)$

(5)$2 \times 7 = (\quad)$ (6)$3 \times 8 = (\quad)$ (7)$2 \times 9 = (\quad)$ (8)$5 \times 7 = (\quad)$

(9)$8 \times 2 = (\quad)$ (10)$7 \times 7 = (\quad)$ (11)$6 \times 3 = (\quad)$ (12)$9 \times 7 = (\quad)$

(13)$3 \times 9 = (\quad)$ (14)$4 \times 3 = (\quad)$ (15)$7 \times 6 = (\quad)$ (16)$2 \times 5 = (\quad)$

(17)$9 \times 1 = (\quad)$ (18)$6 \times 5 = (\quad)$ (19)$8 \times 8 = (\quad)$ (20)$3 \times 2 = (\quad)$

(21)$6 \times 6 = (\quad)$ (22)$4 \times 8 = (\quad)$ (23)$3 \times 7 = (\quad)$ (24)$9 \times 4 = (\quad)$

(25)$5 \times 8 = (\quad)$ (26)$9 \times 9 = (\quad)$ (27)$6 \times 1 = (\quad)$ (28)$3 \times 9 = (\quad)$

(29)$6 \times 5 = (\quad)$ (30)$7 \times 8 = (\quad)$ (31)$9 \times 7 = (\quad)$ (32)$2 \times 6 = (\quad)$

(33)$2 \times 8 = (\quad)$ (34)$5 \times 5 = (\quad)$ (35)$3 \times 5 = (\quad)$ (36)$8 \times 8 = (\quad)$

(37)$7 \times 9 = (\quad)$ (38)$8 \times 1 = (\quad)$ (39)$2 \times 4 = (\quad)$ (40)$6 \times 4 = (\quad)$

(41)$6 \times 7 = (\quad)$ (42)$8 \times 5 = (\quad)$ (43)$5 \times 9 = (\quad)$ (44)$7 \times 1 = (\quad)$

(45)$7 \times 8 = (\quad)$ (46)$4 \times 8 = (\quad)$ (47)$5 \times 3 = (\quad)$ (48)$9 \times 8 = (\quad)$

(49)$3 \times 3 = (\quad)$ (50)$5 \times 5 = (\quad)$ (51)$7 \times 4 = (\quad)$ (52)$7 \times 6 = (\quad)$

(53)$4 \times 9 = (\quad)$ (54)$6 \times 8 = (\quad)$ (55)$2 \times 9 = (\quad)$ (56)$6 \times 9 = (\quad)$

(57)$8 \times 3 = (\quad)$ (58)$5 \times 9 = (\quad)$ (59)$7 \times 4 = (\quad)$ (60)$6 \times 2 = (\quad)$

partII: (請在隔天一天後再次練習，勿連續練習)

分數:____/60，正確率:______%。

(1)$5 \times 6 =$ (　　) (2)$3 \times 7 =$ (　　) (3)$7 \times 5 =$ (　　) (4)$6 \times 6 =$ (　　)

(5)$3 \times 8 =$ (　　) (6)$4 \times 9 =$ (　　) (7)$3 \times 1 =$ (　　) (8)$6 \times 8 =$ (　　)

(9)$9 \times 3 =$ (　　) (10)$8 \times 8 =$ (　　) (11)$7 \times 4 =$ (　　) (12)$8 \times 1 =$ (　　)

(13)$4 \times 7 =$ (　　) (14)$5 \times 4 =$ (　　) (15)$8 \times 7 =$ (　　) (16)$3 \times 6 =$ (　　)

(17)$8 \times 6 =$ (　　) (18)$7 \times 6 =$ (　　) (19)$9 \times 9 =$ (　　) (20)$4 \times 3 =$ (　　)

(21)$7 \times 7 =$ (　　) (22)$5 \times 9 =$ (　　) (23)$4 \times 8 =$ (　　) (24)$2 \times 2 =$ (　　)

(25)$6 \times 9 =$ (　　) (26)$9 \times 1 =$ (　　) (27)$7 \times 2 =$ (　　) (28)$4 \times 9 =$ (　　)

(29)$7 \times 6 =$ (　　) (30)$8 \times 9 =$ (　　) (31)$7 \times 9 =$ (　　) (32)$3 \times 5 =$ (　　)

(33)$3 \times 6 =$ (　　) (34)$6 \times 6 =$ (　　) (35)$4 \times 6 =$ (　　) (36)$9 \times 8 =$ (　　)

(37)$8 \times 7 =$ (　　) (38)$9 \times 2 =$ (　　) (39)$3 \times 5 =$ (　　) (40)$7 \times 5 =$ (　　)

(41)$7 \times 8 =$ (　　) (42)$9 \times 6 =$ (　　) (43)$6 \times 8 =$ (　　) (44)$8 \times 2 =$ (　　)

(45)$8 \times 5 =$ (　　) (46)$5 \times 9 =$ (　　) (47)$6 \times 4 =$ (　　) (48)$9 \times 1 =$ (　　)

(49)$4 \times 4 =$ (　　) (50)$6 \times 6 =$ (　　) (51)$8 \times 5 =$ (　　) (52)$8 \times 7 =$ (　　)

(53)$5 \times 1 =$ (　　) (54)$7 \times 9 =$ (　　) (55)$3 \times 8 =$ (　　) (56)$7 \times 8 =$ (　　)

(57)$9 \times 4 =$ (　　) (58)$6 \times 5 =$ (　　) (59)$8 \times 5 =$ (　　) (60)$2 \times 6 =$ (　　)

◎100、1000 的減法

除了在計算上常用外，在日常生活中，也常使用百元鈔、千元鈔付款，真是一舉兩得呢。若用直式的計算應該是沒辦法在時間內完成小試身手的，我們要去思考減法的另一層含意，也就是存在另外一個數與減數相加後會是被減數 100 或 1000。可以觀察出其另外一個數是怎樣產生，例如:$100 - 12 = 88$，我們發現 100

的十位及個位數字都是 0，勢必都是要進位的。12 的個位數字是 2 於是答案的的個位數字是 8，而十位數字必要相加是 9(因為它需要保留進位的 1)，於是答案的十位數字要是 8，於是得到 88。於是，我們就可以透過心算來得出 100 的減法的答案。1000 的減法規則就留給讀者想想吧!

小試身手:

下列是「100、1000 內減法」，請在 3 分鐘內完成，並正確率 100%。

partI:

分數:_____/40，正確率:______%。

(1)$100-62=($　　$)$ (2)$100-25=($　　$)$ (3)$1000-35=($　　$)$

(4)$100-82=($　　$)$ (5)$1000-125=($　　$)$ (6)$100-22=($　　$)$

(7)$1000-228=($　　$)$ (8)$1000-11=($　　$)$ (9)$100-13=($　　$)$

(10)$100-44=($　　$)$ (11)$100-68=($　　$)$ (12)$100-19=($　　$)$

(13)$1000-520=($　　$)$ (14)$1000-324=($　　$)$ (15)$1000-221=($　　$)$

(16)$1000-625=($　　$)$ (17)$100-57=($　　$)$ (18)$100-39=($　　$)$

(19)$1000-441=($　　$)$ (20)$1000-729=($　　$)$ (21)$1000-961=($　　$)$

(22)$100-66=($　　$)$ (23)$1000-345=($　　$)$ (24)$100-77=($　　$)$

(25)$100-84=($　　$)$ (26)$100-11=($　　$)$ (27)$1000-676=($　　$)$

(28)$1000-731=($　　$)$ (29)$1000-888=($　　$)$ (30)$1000-111=($　　$)$

(31)$1000-89=($　　$)$ (32)$1000-32=($　　$)$ (33)$1000-181=($　　$)$

(34)$1000-274=($　　$)$ (35)$100-14=($　　$)$ (36)$1000-554=($　　$)$

(37)$100-61=($　　$)$ (38)$1000-639=($　　$)$ (39)$1000-431=($　　$)$

(40)$1000-783=($　　$)$

partII: (請在隔天一天後再次練習，勿連續練習)

分數:____/40，正確率:______%。

(1)$100-41=($　　$)$ (2)$100-35=($　　$)$ (3)$1000-125=($　　$)$

(4)$100-89=($　　$)$ (5)$1000-421=($　　$)$ (6)$100-29=($　　$)$

(7)$1000-207=($　　$)$ (8)$1000-71=($　　$)$ (9)$100-33=($　　$)$

(10)$100-23=($　　$)$ (11)$100-58=($　　$)$ (12)$100-61=($　　$)$

(13)$1000-820=($　　$)$ (14)$1000-99=($　　$)$ (15)$1000-299=($　　$)$

(16)$1000-699=($　　$)$ (17)$100-47=($　　$)$ (18)$100-84=($　　$)$

(19)$1000-342=($　　$)$ (20)$1000-539=($　　$)$ (21)$1000-921=($　　$)$

(22)$100-37=($　　$)$ (23)$1000-719=($　　$)$ (24)$100-59=($　　$)$

(25)$100-66=($　　$)$ (26)$100-71=($　　$)$ (27)$1000-384=($　　$)$

(28)$1000-777=($　　$)$ (29)$1000-388=($　　$)$ (30)$1000-418=($　　$)$

(31)$1000-125=($　　$)$ (32)$1000-365=($　　$)$ (33)$1000-131=($　　$)$

(34)$1000-766=($　　$)$ (35)$100-28=($　　$)$ (36)$1000-729=($　　$)$

(37)$1000-243=($　　$)$ (38)$1000-196=($　　$)$ (39)$1000-361=($　　$)$

(40)$1000-314=($　　$)$

◎30 以內的平方數:

11	X	11	=	121
12	X	12	=	144
13	X	13	=	169
14	X	14	=	196
15	X	15	=	225
16	X	16	=	256
17	X	17	=	289
18	X	18	=	324
19	X	19	=	361
20	X	20	=	400
21	X	21	=	441
22	X	22	=	484
23	X	23	=	529
24	X	24	=	576
25	X	25	=	625
26	X	26	=	676
27	X	27	=	729
28	X	28	=	784
29	X	29	=	841

若我們這樣直接背著，背不起來。我們可以嘗試一個方法:將一張兩邊空白的白紙剪成大小差不多的樣子，將其正面寫上 11、背面寫上 121，打亂後我們就依序讀著紙片數個循環。若有仍然不熟的我們可以另外放一邊，或是對的放一邊、不對的放一邊，便可以快速的記憶平方數了。(日文、韓文在背字母、片假名等利用這個方法效果也很好呢!)

小試身手:

下列是「30 以內的平方」，請在 1 分鐘內完成，並正確率 100%。

partI:

分數:____/20，正確率:______%。

(1)$19 \times 19 = (\quad)$ (2)$121 = (\quad)$ (3)$16 \times 16 = (\quad)$ (4)$484 = (\quad)$

(5)$25 \times 25 = (\quad)$ (6)$676 = (\quad)$ (7)$17 \times 17 = (\quad)$ (8)$441 = (\quad)$

(9)$23^2 = (\quad)$ (10)$576 = (\quad)$ (11)$144 = (\quad)$ (12)$841 = (\quad)$

(13)$27 \times 27 = (\quad)$ (14)$169 = (\quad)$ (15)$289 = (\quad)$ (16)$676 = (\quad)$

(17)$400 = (\quad)$ (18)$18^2 = (\quad)$ (19)$784 = (\quad)$ (20)$529 = (\quad)$

partII: (請在隔天一天後再次練習，勿連續練習)

分數:____/20，正確率:______%。

(1)$22 \times 22 = (\quad)$ (2)$729 = (\quad)$ (3)$15 \times 15 = (\quad)$ (4)$289 = (\quad)$

(5)$14 \times 14 = (\quad)$ (6)$144 = (\quad)$ (7)$23 \times 23 = (\quad)$ (8)$841 = (\quad)$

(9)$29 \times 29 = (\quad)$ (10)$576 = (\quad)$ (11)$11^2 = (\quad)$ (12)$361 = (\quad)$

(13)$18 \times 18 = (\quad)$ (14)$225 = (\quad)$ (15)$484 = (\quad)$ (16)$13^2 = (\quad)$

(17)$529 = (\quad)$ (18)$26 \times 26 = (\quad)$ (19)$400 = (\quad)$ (20)$784 = (\quad)$

◎2、3、5 的指數

2^2	=	4
2^3	=	8
2^4	=	16
2^5	=	32
2^6	=	64
2^7	=	128
2^8	=	256
2^9	=	512
2^{10}	=	1024

3^2	=	9
3^3	=	27
3^4	=	81
3^5	=	243
3^6	=	729

5^2	=	25
5^3	=	125
5^4	=	625

小試身手:

下列是「2、3、5 的指數」，請在 1 分鐘內完成，並正確率 100%。

partI:

分數:____/15，正確率:______%。

(1)$2^5 = (\quad)$ (2)$256 = (\quad)$ (3)$3^4 = (\quad)$ (4)$2^9 = (\quad)$

(5)$243 = (\quad)$ (6)$1024 = (\quad)$ (7)$2^7 = (\quad)$ (8)$5^2 = (\quad)$

(9)$5^4 = (\quad)$ (10)$729 = (\quad)$ (11)$2^3 = (\quad)$ (12)$125 = (\quad)$

(13)$2^4 = (\quad)$ (14)$512 = (\quad)$ (15)$81 = (\quad)$

partII: (請在隔天一天後再次練習，勿連續練習)

分數:____/15，正確率:______%。

(1)$8 = (\quad)$ (2)$243 = (\quad)$ (3)$125 = (\quad)$ (4)$2^7 = (\quad)$

(5)$729 = (\quad)$ (6)$32 = (\quad)$ (7)$2^3 = (\quad)$ (8)$3^4 = (\quad)$

(9)$2^9 = (\quad)$ (10)$256 = (\quad)$ (11)$3^3 = (\quad)$ (12)$3^6 = (\quad)$

(13)$5^4 = (\quad)$ (14)$64 = (\quad)$ (15)$16 = (\quad)$

◎常見分數與小數的轉換: 轉換後對數學的計算或許有完全不同的效率。

分數	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{5}$
小數	0.1	0.2	0.4	0.5	0.6

分數	$\frac{4}{5}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$		
小數	0.8	0.25	0.75		

分數	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{100}$
小數	0.6	0.8	0.1	0.05	0.01

分數	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{3}{20}$
小數	0.125	0.375	0.625	0.875	0.15

分數	$\frac{7}{20}$	$\frac{9}{20}$	$\frac{11}{20}$	$\frac{13}{20}$	$\frac{17}{20}$
小數	0.35	0.45	0.55	0.65	0.85

分數	$\frac{19}{20}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{40}$	$\frac{1}{50}$	$\frac{3}{50}$
小數	0.95	0.04	0.025	0.02	0.06

小試身手:

下列是「常見分數與小數的轉換」，請在 3 分鐘內完成，並正確率 100%。

partI:

分數:____/15，正確率:______%。

(1) $\frac{3}{5}=($　　　$)$ (2)$0.875=($　　　$)$ (3) $\frac{1}{20}=($　　　$)$ (4) $\frac{7}{20}=($　　　$)$

(5)$0.25=($　　　$)$ (6)$0.45=($　　　$)$ (7) $\frac{6}{8}=($　　　$)$ (8) $\frac{13}{20}=($　　　$)$

(9) $\frac{1}{4}=($　　　$)$ (10)$0.06=($　　　$)$ (11) $\frac{3}{8}=($　　　$)$ (12) $\frac{4}{5}=($　　　$)$

(13) $\frac{17}{20}=($　　　$)$ (14)$0.01=($　　　$)$ (15)$0.125=($　　　$)$

partII: (請在隔天一天後再次練習，勿連續練習)

分數:____/15，正確率:______%。

(1) $\frac{1}{5}=($　　　$)$ (2)$0.375=($　　　$)$ (3) $\frac{5}{8}=($　　　$)$ (4) $\frac{3}{4}=($　　　$)$

(5)$0.45=($　　　$)$ (6)$0.6=($　　　$)$ (7) $\frac{3}{20}=($　　　$)$ (8) $\frac{4}{5}=($　　　$)$

(9) $\frac{1}{10}=($　　　$)$ (10)$0.06=($　　　$)$ (11) $\frac{17}{20}=($　　　$)$ (12) $\frac{1}{50}=($　　　$)$

(13) $\frac{1}{40}=($　　　$)$ (14)$0.8=($　　　$)$ (15)$0.025=($　　　$)$

◎12 至 19 的乘法

12	X	2	=	24	13	X	2	=	26
12	X	3	=	36	13	X	3	=	39
12	X	4	=	48	13	X	4	=	52
12	X	5	=	60	13	X	5	=	65
12	X	6	=	72	13	X	6	=	78
12	X	7	=	84	13	X	7	=	91
12	X	8	=	96	13	X	8	=	104
12	X	9	=	108	13	X	9	=	117
14	X	2	=	28	15	X	2	=	30
14	X	3	=	42	15	X	3	=	45
14	X	4	=	56	15	X	4	=	60
14	X	5	=	70	15	X	5	=	75
14	X	6	=	84	15	X	6	=	90
14	X	7	=	98	15	X	7	=	105
14	X	8	=	112	15	X	8	=	120
14	X	9	=	126	15	X	9	=	135
16	X	2	=	32	17	X	2	=	34
16	X	3	=	48	17	X	3	=	51
16	X	4	=	64	17	X	4	=	68
16	X	5	=	80	17	X	5	=	85
16	X	6	=	96	17	X	6	=	102
16	X	7	=	112	17	X	7	=	119
16	X	8	=	128	17	X	8	=	136
16	X	9	=	144	17	X	9	=	153
18	X	2	=	36	19	X	2	=	38
18	X	3	=	54	19	X	3	=	57
18	X	4	=	72	19	X	4	=	76
18	X	5	=	90	19	X	5	=	95
18	X	6	=	108	19	X	6	=	114
18	X	7	=	126	19	X	7	=	133
18	X	8	=	144	19	X	8	=	152
18	X	9	=	162	19	X	9	=	171

小試身手:

下列是「12 至 19 的乘法」，請在 3 分鐘內完成，並正確率 100%。

partI:

分數:____/25，正確率:______%。

(1)$13 \times 5 = (\quad)$ (2)$12 \times 6 = (\quad)$ (3)$19 \times 4 = (\quad)$ (4)$15 \times 5 = (\quad)$

(5)$16 \times 7 = (\quad)$ (6)$13 \times 8 = (\quad)$ (7)$12 \times 9 = (\quad)$ (8)$15 \times 7 = (\quad)$

(9)$19 \times 2 = (\quad)$ (10)$13 \times 7 = (\quad)$ (11)$16 \times 3 = (\quad)$ (12)$14 \times 5 = (\quad)$

(13)$13 \times 4 = (\quad)$ (14)$17 \times 3 = (\quad)$ (15)$18 \times 5 = (\quad)$ (16)$19 \times 5 = (\quad)$

(17)$18 \times 4 = (\quad)$ (18)$17 \times 5 = (\quad)$ (19)$12 \times 8 = (\quad)$ (20)$17 \times 2 = (\quad)$

(21)$15 \times 6 = (\quad)$ (22)$16 \times 4 = (\quad)$ (23)$14 \times 7 = (\quad)$ (24)$9 \times 13 = (\quad)$

(25)$15 \times 8 = (\quad)$

partII: (請在隔天一天後再次練習，勿連續練習)

分數:____/25，正確率:______%。

(1)$14 \times 6 = (\quad)$ (2)$13 \times 7 = (\quad)$ (3)$18 \times 3 = (\quad)$ (4)$16 \times 4 = (\quad)$

(5)$17 \times 7 = (\quad)$ (6)$14 \times 8 = (\quad)$ (7)$13 \times 3 = (\quad)$ (8)$15 \times 4 = (\quad)$

(9)$19 \times 3 = (\quad)$ (10)$15 \times 7 = (\quad)$ (11)$16 \times 3 = (\quad)$ (12)$14 \times 4 = (\quad)$

(13)$12 \times 9 = (\quad)$ (14)$18 \times 5 = (\quad)$ (15)$17 \times 5 = (\quad)$ (16)$18 \times 4 = (\quad)$

(17)$19 \times 2 = (\quad)$ (18)$18 \times 2 = (\quad)$ (19)$13 \times 9 = (\quad)$ (20)$12 \times 7 = (\quad)$

(21)$15 \times 3 = (\quad)$ (22)$17 \times 3 = (\quad)$ (23)$12 \times 6 = (\quad)$ (24)$9 \times 15 = (\quad)$

(25)$16 \times 5 = (\quad)$

註:這些基礎計算不是一二天、一二周的時間就可以熟練的應用在考試上，它需要長時間的累積、培養，在作業、考試的思考中慢慢磨練成為紮實的基本功。

註:中文詩詞、英文的名言諺語也都是可以作為訓練的好題材，未來在作文、文案寫作上都會有很好的發揮空間，而這些也是需要長時間累積的。

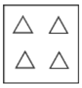
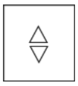
C. 圖形關係訓練

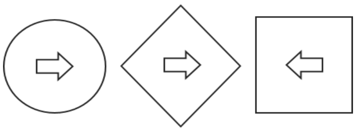
圖形的部分，可以分成平面圖形與立體圖形。平面圖形，我們將嘗試練習找出圖形的規則(rule)，與將兩個以上的圖形結合的推理。立體圖形，則是判斷從不同面向觀察它的樣子。Let's go!

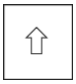
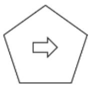
小試身手:

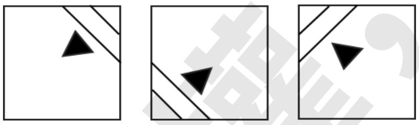
(1)~(5)請依據題目圖形判斷出下列選項中何者是同一規則圖形。

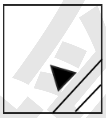
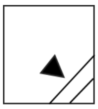
(1)(　　) 

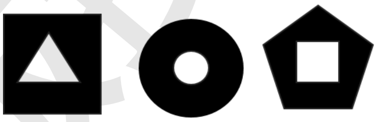
(A)  (B)  (C)  (D)  。

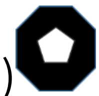
(2)(　　) 

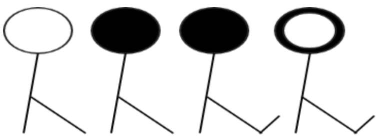
(A)  (B)  (C)  (D)  。

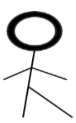
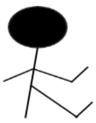
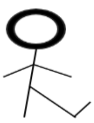
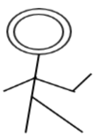
(3)(　　) 

(A)  (B)  (C)  (D)  。

(4)(　　) 

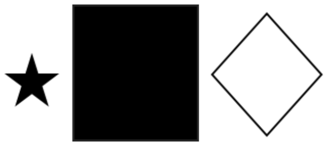
(A)  (B)  (C)  (D)  。

(5)(　　) 

(A)  (B)  (C)  (D)  。

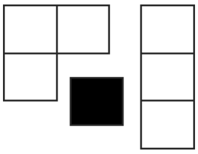
(6)~(8)請根據題目圖形判斷出選項是否爲其圖形的結合(重疊、合併)。

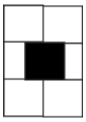
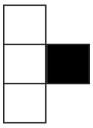
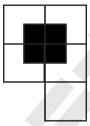
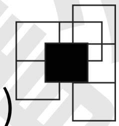
(6)(　　)下列何者是三圖形的結合?



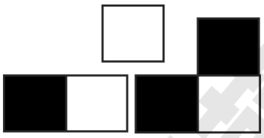
(A)(B)(C)(D)。

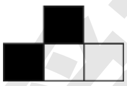
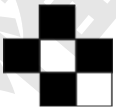
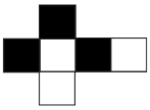
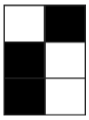
(7)(　　)下列何者並非是三圖形的結合?



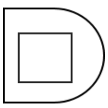
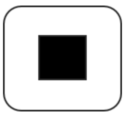
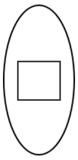
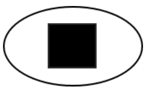
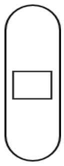
(A)(B)(C)(D)。

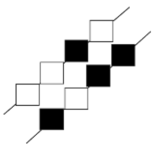
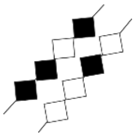
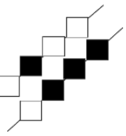
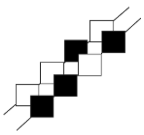
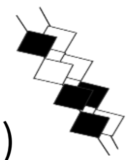
(8)(　　)下列何者並非是三圖形的結合?



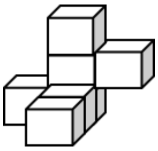
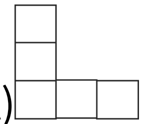
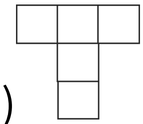
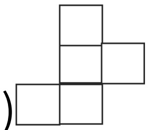
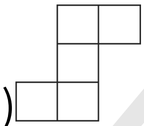
(A)(B)(C)(D)。

(9)~(10)請根據五個選項中的圖形判斷出有一個不是同類型的圖形。

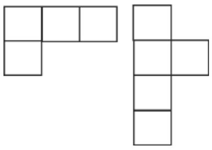
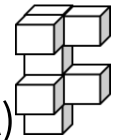
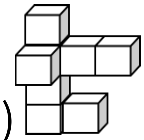
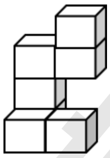
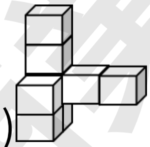
(9)(　　)(A)(B)(C)(D)(E)。

(10)(　　)(A)(B)(C)(D)(E)。

(11) (　　)請根據題目圖形，判斷選項中何者不是它某一面的視圖。

 (A)(B) (C) (D) 。

(12)(　　)請根據題目圖形，判斷選項中何者是它某一面的視圖。

 (A)(B) (C)(D) 。

d. 數感訓練

「數感(number sense)」一詞，自於 1954 年由美國數學家喬治 • 伯納德 • 丹齊格(George Bernard Dantzig)提出後，至今都深受大家討論。數感，起源是對數字中的一種感覺，有些人看了一串數字後，便覺得就是些數字而已；而有些人卻可以從數字中找到訊息，而把這種找到數字關聯的「靈光一現」、「直覺(intuition)」等稱其為數感。數感不是數學的知識化、也不是數學計算的教育，在這個小節中我們嘗試透過練習一些學找數字關聯的題目，多培養自己「思考」的能力。

小試身手:

(1)~(15)請觀察依某規則排列的一串數字，選出適合空格的答案。

(1)(　　) 1、1、2、3、5、____、13 (A) 5 (B) 7 (C) 8 (D) 11。

(2)(　　) 1、1、2、4、7、11、____ (A) 16 (B) 15 (C) 14 (D) 13。

(3)(　　) 5、12、19、26、____ (A) 28 (B) 31 (C) 32 (D) 33。

(4)(　　) 2、3、5、9、17、33、____ (A) 35 (B) 42 (C) 65 (D) 67。

(5)(　　) 28、29、____、30、26、31、25 (A) 27 (B) 28 (C) 30 (D) 32。

(6)(　　) 1、4、____、16、25、36、49 (A) 7 (B) 9 (C) 12 (D) 13。

(7)(　　) 1、____、3、12、5、10、7、8、9 (A) 14 (B) 2 (C) 6 (D) 8。

(8)(　　) 120、____、168、195、224、255、288

(A) 128 (B) 148 (C) 143 (D) 153。

(9)(　　) ____、43、47、53、59、61、67 (A) 39 (B) 41 (C) 42 (D) 34。

(10)(　　) 1、3、6、11、18、29、____ (A) 33 (B) 34 (C) 42 (D) 43。

(11)(　　) 0、1、8、27、64、125、____

(A) 128 (B) 168 (C) 196 (D) 216。

(12)(　　) 1、$\frac{1}{2}$、$\frac{2}{3}$、____、$\frac{5}{8}$、$\frac{8}{13}$ (A) $\frac{3}{4}$ (B) $\frac{3}{5}$ (C) $\frac{2}{6}$ (D) $\frac{3}{6}$。

(13)(　　) $\frac{1}{2}$、$\frac{1}{3}$、____、$\frac{4}{27}$、$\frac{8}{81}$ (A) $\frac{2}{5}$ (B) $\frac{2}{9}$ (C) $\frac{1}{3}$ (D) $\frac{2}{7}$。

(14)(　　) 0、113、115、0、119、____ 、0、125

(A) 0 (B) 121 (C) 122 (D) 123。

(15)(　　) 000、001、010、011、100、____

(A) 1000 (B) 111 (C) 110 (D) 101。

(16)~(22)請觀察依某規則排列敘述，選出適合空格的答案。

(16)(　　)「二一、四____ 六三、十二六」(A)一(B)二(C)三(D)四。

(17)(　　)「四十、二____ 、六又十五」(A)一(B)三(C)五(D)七。

(18)(　　)「二八年華、三七歲月、____事件」

(A)二六(B)六四(C)四六(D)九六。

(19)(　　)「二八狗、三七牛、五九____」(A)兔(B)龍(C)馬(D)鼠。

(20)(　　)「甲甲乙、甲乙、乙、乙丙、 ____」

(A)乙丙丁(B)丙(C)甲乙丙(D)乙丙丙。

(21)(　　)「春中、夏下、秋上、冬中、春下、 ____ 、秋中」

(A)夏上(B)冬上(C)冬下(D)夏下。

(22)(　　)「上十八、下十三、左十七、右 ____ 、中三一」

(A)十六(B)十七(C)十八(D)十四。

(23)~(28)請觀察依某規則排列的一串符號，選出適合空格的答案。

(23)(　　)「z、y、x、____、v、u、t」(A) s (B) p (C) w (D) q。

(24)(　　)「Az、Bx、Cv、____、Er、Fp、Gn」

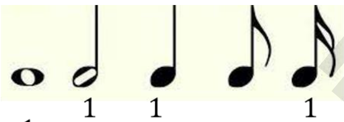
(A) Ds (B) Do (C) Dw (D) Dt。

(25)(　　)「Acy、Bfx、Diw、____、Gou、Hrt、Jus」

(A) Elv (B) Cav (C) Eno (D) Fnv。

(26)(　　)「α、$\dot{\alpha}$、____、$\dddot{\alpha}$、$\tilde{\alpha}$、____、$\bar{\bar{\alpha}}$、$\hat{\alpha}$」

(A) $\overset{\alpha}{\div}\cdots\overleftrightarrow{\alpha}$ (B) $\ddot{\alpha}\cdots\underline{\alpha}$ (C) $\ddot{\alpha}\cdots\bar{\alpha}$ (D) $\check{\alpha}\cdots\bar{\alpha}$ 。

(27)(　　) 

1、$\frac{1}{2}$、$\frac{1}{4}$、___、$\frac{1}{16}$ (A) $\frac{1}{6}$ (B) $\frac{1}{8}$ (C) $\frac{1}{10}$ (D) $\frac{1}{12}$。

(28)(　　)「$\boxed{\text{紅}}$、$\boxed{\text{黃}}$、$\boxed{\text{橘}}$、$\boxed{\text{藍}}$、$\boxed{\text{白}}$、$\boxed{\text{綠}}$、$\boxed{\text{黃}}$、$\boxed{\text{紅}}$、$\boxed{\text{黃}}$、$\boxed{\text{橘}}$、$\boxed{\text{藍}}$、__、$\boxed{\text{綠}}$、$\boxed{\text{黃}}$」

(A)$\boxed{\text{白}}$(B)$\boxed{\text{黃}}$(C)$\boxed{\text{藍}}$(D)$\boxed{\text{紅}}$。

(29)~(40)請觀察各選項，它們依某種規則組成，請在選項中找出<u>並非</u>使用相同規則的選項。

(29)(　　)(A)百分之二十(B)金錢/秒(C)打八折(D)省二成。

(30)(　　)(A)平方公尺(B)公升(C)毫升(D)立方公分。

(31)(　　)(A)1560(B)6240(C)3333(D)1250(E)5025。

(32)(　　)(A)6075-6(B)4576-2(C)1054-8(D)5262-1(E)9999-0。

(33)(　　)(A)「3、4」「3、4」「3、4」(B)「3、3、4」「3、4、4」
(C)「3、3」「3、4」「4、4」(D)「3」「3、4」「3、3、4」。

(34)(　　)(A)「1、1、2、2、4」「2、8」「2、8」
(B)「2、8」「2、8」「1、1、1、1、2、4」
(C)「2、8」「1、1、8」「1、1、2、2、4」
(D)「1、1、8」「2、2、2、4」「1、1、8」。

(35)(　　)(A)「17:30」(B)「18:20」(C)「19:15」(D)「20:45」。

(36)(　　)(A)「12:36」(B)「13:12」(C)「09:35」(D)「21:48」。

(37)(　　)(A)「0926-367553」(B)「0972-005364」
(C)「0800-234665」(D)「0959-124651」。

(38)(　　)(A)「905L-EF」(B)「ATT-6665」(C)「BMB-6088」
(D)「EMY-1888」。

(39)(　　)(A)「2022/06/30」(B)「30/22/06」(C)「06/30/22」
(D)「22/06/30」。

(40)(　　)(A)「$1-AB$」(B)「$9-XYZ$」(C)「$2-CDE$」(D)「$6-RST$」
(E)「$4-IJK$」。

註:數感，決定性的能力在「觀察(observation)」，包含紛亂資訊中找到目標的能力、找到資訊變化能力、整理資訊的能力及將現有知識連結與應用的能力。

⊙資訊中找到目標的能力:比對的能力(comparison)

⊙找到資訊變化能力:邏輯演繹的能力

⊙整理資訊的能力:歸納與統計的能力

⊙將現有知識連結與應用的能力:類比、推理演繹、記憶力

我們可以發現就廣義的觀察能能力而言，其實也與很多能力互相依賴。而這些能力也不一定要用在多困難的數學上才會稱呼數感，我們生活中小小、簡單的問題也都是可以這樣解決的。

e. 抽象能力訓練

最後一個小節中，將綜合前面小節的練習，對題目進行分析、整合、推理。趕緊完成這個最後的小節吧!

小試身手:

(1)(　　)觀察下列九宮格中數字關係，則空格中遺漏的數字是下列何者? (A)23(B)22(C)17(D)18。

16	21	14
15	17	19
20	13	?

(2)(　　)觀察下列格子中數字關係，則空格中遺漏的數字是下列何者?

9	22	6	?
4			11
15			8
32	3	7	18

(A)34(B)17(C)23(D)27。

(3)( )觀察下列兩格子中數字關係，則空格中遺漏的數字是下列何者?

8	23
35	17

11	②
①	20

(A)①:38、②:23 (B)①:38、②:26

(C)①:32、②:26 (D)①:43、②:16。

(4)( )「若依照家族規則:爸爸禮讓媽媽、兄長禮讓弟妹、子女禮讓父母、家人禮讓客人」，若爸爸拿著橘子遇到媽媽，媽媽遇到哥哥後，哥哥遇到妹妹，媽媽接待客人，則橘子最後在誰那?

(A)客人(B)媽媽(C)哥哥(D)妹妹。

(5)( )有個計算符號「☆」計算規則:

例如:0☆0=1。

☆	0	1
0	1	0
1	0	1

則下列選項何者結果與其它三個選項不同?

(A) 1☆1 (B) (0☆0)☆1 (C) 0☆(1☆0) (D) (1☆0)☆1。

(6)( )舊手機上數字 2 至 9 鍵分別表示:ABC、DEF、…PQR、STUV、WXYZ。有封簡訊只寫上「6423」，下列選項可能是它表示的意思?

(A)okey(B)nice(C)home(D)liar。

(7)(　　)16 層階梯的兩端是甲蛙與乙蛙，甲蛙往上跳一次只能跳二格階梯、乙蛙往下跳一次則可以跳三層，若兩蛙以相同速度前進，則兩蛙會在第幾層相遇?(由下往上算起第一層)

(A)6(B)7(C)8(D)10 層。

(8)(　　)某林家族族人的名字會以「齊家治國平天下」的規則，將其字取在名字中間並隨輩分往後延續。例如:爸爸林天財、兒子林下石，我們常稱這樣輩分為「O 字輩」。若爺爺名字是林治鈞，試問下列選項中哪個可能分別是爺爺的爺爺、爺爺的孫子?

(A)林齊光、林平政 (B)林家熙、林國水

(C)林平峰、林齊祐 (D)林齊鴻、林國官。

(9)(　　)公司的資料編碼規則:

①由 2 個小寫英文與 4 個數字組成，且英文在前數字在後。

②英文、數字皆不可重複、連續出現。

③數字的最後一碼(個位數碼)為前三碼之總和÷10 的餘數。

則下列何者並非是此公司的編碼?

(A)pr7243(B)fr0381(C)et5274(D)ck6357。

(10)( )有一排連續住家，分別住著王、黃、陳、林姓四戶人家。林家與黃家不相鄰、陳家不在王家隔壁、陳家不在黃家隔壁，下列敘述何者爲非?

(A)此題有兩種排列可能 (B)林家隔壁必有陳家

(C)王家與林家必夾在黃家與陳家的之間

(D)林家左方必是陳家。

(11)~(12)請觀察下表，回答下列問題:

延	延	延	延	延	延	延
延	延	延	延	延	延	延
延	延	延	延	延	延	延
延	延	延	延	延	延	延
延	延	延	延	延	廷	延
延	延	延	延	延	延	延
延	延	廷	延	延	延	延

(11)( )圖表中共有多少個字不是「延」字? (A)0(B)1(C)3(D)4 個。

(12)( )原來不是「延」字的話就是寫錯字，則他「延」字書寫正確比率是多少?(請四捨五入至整數)

(A)93%(B)94%(C)95%(D)92%。

(13)~(14)請觀察下列對話，回答下列問題:

塔台收到兩架一起出勤戰機(編號 S001、F003)在空中的回報:

「S001 回報:左邊(V6-1)、右邊(V6-2)及上方(V6-4)遭到敵軍包夾，F003 在我的右前方，空中雲霧很多，請指示下一步。」

「F003 回報:右方(V6-3)、後方(V6-5)遭敵軍緊追，S001 在我的左後方，請求支援。」

(13)(　　)塔台收到訊息後，研判可能發生下列哪一個問題?

(A)S001 誤認 V6-3 是 F003

(B)F003 誤認左後方敵軍是 S001

(C)多架飛機飛行中最左邊的是 V6-5

(D)F003 無法向上飛行。

(14)(　　)試問塔台在不開戰的情況下，要如何調整兩架飛機，才有可能突破包圍網?

(A)F003 降速並往左邊移動，使 V6-2、V6-5 發生衝突

(B)S001、F003 同時向上

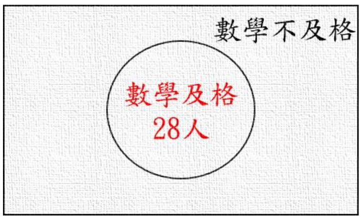
(C)F003 減速向右方移動、S001 減速

(D)F003 不停向左方移動，使 V6-4、V6-5 發生衝突。

(15)~(18)請依據題意回答下列問題:

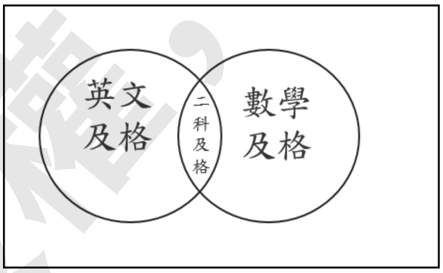
班上共有有 42 位同學，班上數學考試 60 分以上的共有 28 位。

(15)(　　)如圖表示:若把班上同學聚在教室中，圈內是 60 分及格的同學，則圈外的是不及格的同學共有多少人?



(A)18 (B)16 (C)14 (D)32 人。

(16)(　　)而英文考試有 25 位同學及格，且有 18 位同學同時英文、數學及格。如圖表示:另一圈表示英文及格，而重疊表示兩科目都及格的同學，試問數學及格而英文不及格的同學共有幾位?(請先思考是圖的哪個位置)



(A)22 (B)8 (C)9 (D)10 人。

(17)(　　)試問英文及格而數學不及格的同學共有幾位?

(A)16 (B)6 (C)7 (D)8 人。

(18)(　　)試問英文及數學都不及格的同學共有幾位?

(A)12 (B)8 (C)7 (D)4 人。

註:將資料以這樣的圖形去區分、表達不同族群的關係，稱其文氏圖(Venn diagram)。

(19)~(20)請閱讀下文後，依據題意回答下列問題:

有一家公司調查 200 名員工，去過日本的共有 72 位、去過韓國的共有 55 位，去過韓國但是沒去過日本的員工共有 29 位。

(19)( )試問去過日本但沒去過韓國的員工共有幾位?

(A)84(B)67(C)53(D)46 位。

(20)( )試問日本及韓國都沒去過的員工共有幾位?

(A)99(B)101(C)127(D)75 位。

(21)~(22)請閱讀下文後，依據題意回答下列問題:

有一農村中有 7 戶人家，每戶各養了 7 隻貓，若每隻貓各抓 7 隻老鼠，每隻老鼠可以吃 7 棵小麥，每株小麥可以賣 7 元。

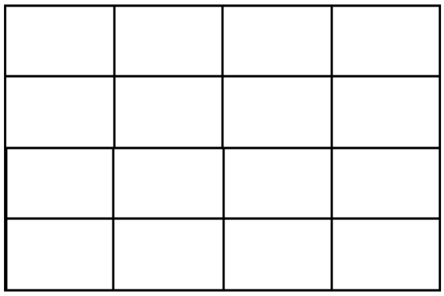
(21)( )如上述，共有多少隻老鼠被抓了?

(A)49(B)343(C)333(D)147 隻。

(22)( )如上述，若放任老鼠不管，7 戶人家共會損失多少錢?

(A)33614(B)2401(C)4802(D)16807 元。

(23)~(25)如下圖中，它是一個被平均分割的正方形，依據題意回答下列問題:



(23)(　　)請問可以數出多少個2×2(格)的矩形?

(A)12(B)6(C)8(D)9 個。

(24)(　　)請問共有幾種類型的正方形?

(A)5(B)4(C)3(D)2 種。

(25)(　　)圖形中共可數出多少正方形?

(A)32(B)31(C)30(D)29 個。

<本書完>

致完成本書所有朋友，此時的你已經具備充分國中課程的所有學習能力，別再懼怕困難，勇往直前吧!

解答篇(B 冊)

第 8 章 文字推理

a. 文字邏輯

-第 3 頁-

(1) 人類能生活在地球上是因爲沒有氧氣

(2) 至少 10 人沒有失蹤

(3) 有人會這題數學

(4) 這次考試至少沒有 3 個人不及格

-第 4 頁-

(5) $3 = 3$且甲 ≥ 3

或($3 = 3$且甲 $\nless 3$)

(6) 哥哥身高比爸爸和弟弟矮

(7) 甲大於等於 10 或甲小於等於 1

或(甲不小於 10 或甲不大於 1)

(8) 至少有個人沒有父母

-第 5 頁-

(9) O

(10) X

(11) X

(12) O

-第 7 頁-

(13) 若不是等腰三角形，則不是正三角形

(14) 若帶傘出門，則明天必下雨

(15) 若乙= 0，則甲×乙= 0

(16) 若老師沒請客，則班上有人沒考 80 分以上

(17) 若面積大於等於 100 平方公分，則它長與寬不爲 5 公分

(18) 若每個人分到 7 顆，則一袋糖果不平均分給 6 個人

(19) 乙

(20) 甲、丙

b. 文字符號

-第 9 頁-

(1) jgnnq-laem

-第 10 頁-

(2) 7730

(3) 3

$7☆5= (7 + 5) \div (5 - 1) = 3$

(4) 10

$35☆(3☆2)= 35☆5= 40 \div 4 = 10$

-第 11 頁-

(5) 7；η

(6) 21；9；κ

c. 文字重整

-第 16 頁-

(1)

1.「久坐病」:疾病風險的增加與長時間坐在椅子上有關，專家將這些致使於現代疾狀通稱「久坐病」

2.久坐對身體影響: 坐過久將減緩身體代謝速度及酵素分解脂肪的速度，還會導致血糖與血壓的升高。

3.運動對久坐的效益: 若一天中有少量、規律的運動，即使只是站著或到處晃晃，卻足以將升高的血壓和血糖降低至之前的正常值。假使兩、三分鐘的輕微運動，加起來若有半小時之久，功效與一次三十分鐘的運動無差異。

研究資料指出，若一個人每週平均坐著超過 64 小時，不管他一周是否運動超過建議的 150 分鐘，都不會達到足以抵銷九小時以上的久坐所導致的傷害。

4.造成疾病: 血糖與血壓逐漸升高外，還會持續損壞動脈的內壁並增加糖尿病、心血管疾病、中風等重大疾病風險。

(2)

將巧克力包裝成方形、圓形禮盒出售，且每盒方形/圓形禮盒的價錢相同。
阿郁原先想購買 3 盒方形和 7 盒圓形，但他身上的錢會不足 240 元，
若改購買 7 盒方形和 3 盒圓形，他身上的錢會剩下 240 元。
若阿郁最後購買 10 盒方形，則他身上的錢會剩下多少元？

d. 文字推理

-第 22 頁-

(1) 教授；醫生；工程師

	小清	小華	美香
工程師	X	X	
醫生	X		X
教授			

從三人話語可以推出，小清爸爸是教授、小華爸爸是醫生、美香爸爸是工程師

(2) ①小番茄②玉米③6400；5200④5760；5920⑤20；0

(1)種植一株小番茄可賺 400 元是比玉米 320 元還多

(2)比較兩種作物，可種 20 株玉米比 13 株小番茄還多

(3)全種植玉米共可獲利:$20 \times 320 = 6400$元；小番茄則是:$13 \times 400 = 5200$

(4)即種 8 株玉米、8 株小番茄，可獲利$8 \times 320 + 8 \times 400 = 5760$元；即種植 11 株玉米、6 株小番茄，可獲利$11 \times 320 + 6 \times 400 = 5920$元

(5)四個方案中，以全部種植玉米的獲利是最多的

(3) 6250

共有硬幣:$\frac{1250}{10} = 125$個，共價值:$125 \times 50 = 6250$元

(4) 22

爬竿時扣除自身高後，實際需共向上$540 - 160 = 380$公分，因此向上 10 次 38 公分則實際會向上$10 \times 38 - 10 \times 2 = 360$公分，故需向上 11 次 38 公分才能爬上頂端，共下落$11 \times 2 = 22$公分

(5) 1；4；3

由甲、乙推知點數 5 的對面是點數 6，由丙推知點數 3 的面連點數 2 與 4，故底面爲 3、剩下最後一面爲點數爲 4

第 9 章 日常生活中的字詞

b. 度量（濃度(溶液溶劑溶質)、微觀尺度）

-第 43 頁-

(1) 溶劑(酒精):$1200 \times \frac{95}{100} = 1140$ 克，則濃度 75%酒精水溶液(在酒精 1140 克下)總重:$1140 \div 75\% = 1520$ 克，將前後兩水溶液之差$1520 - 1200 = 320$克 即爲應添加 320 克的水(溶劑)

(2) 2ppm=$\frac{2\ 克}{1000000\ 克}$，2 噸的水即 2000000 克，應加入 BKC 除藻劑:$2000000 \times \frac{2}{1000000} = 4$克

c. 生活(折返、吋、運動率、閏年)

-第 48 頁-

(1) 42195；21097.5

(2) 105

-第 50 頁-

(3) 1

(4) 1

(5) 1

(6) 10.89

1 台尺=30.3 公分，1 公尺=100 公分 $=\frac{100}{30.3}$台尺，則一平方公尺=$\frac{100}{30.3} \times \frac{100}{30.3}$才，約 10.89 才

(7) 否

漢朝一尺約是今天的 24 公分，用漢尺量:$\frac{165}{24} = 6.875$尺，未達七尺

-第 54 頁-

(8) 庚戌

(9) 2027、2030；2028；不是

d. 生物(動物的足與角、熱量、地質年代)

-第 54 頁-

(1) O

(2) X

雞一般有四個趾、公、母雞皆有肉冠

(3) O

(4) O

(5) O

(6) X

眼睛呈現紅色是因爲眼睛內虹膜是透明的，眼內血管的紅色血液讓兔子眼睛看起來成紅色

(7) O

(8) X

蟾蜍(又稱蛤蟆/癩蝦蟆)與青蛙是不同種的蛙類

(9) O

(10) O

(11) X

犀牛與馬、貘血緣關係較近；河馬和鯨魚血緣關係較接近

(12) 甲、戊、己

-第 59 頁-

(13) 1800；3

(1)$30 \times 60 = 1800$大卡

(2)多出$2790 - 1800 = 990$大卡，需快走$(990 \div 5.5) \div 60 = 3$小時，才能消耗多餘熱量

(14) 820

兩包共兩份，熱量:$410 \times 2 = 820$大卡

e. 資訊(檔案大小)、地理(海拔、方位法)、其他(易混淆字)

-第 62 頁-

(1) 13653

32GB 共32×1024MB，

可儲存$\frac{32\times1024}{2.4} \approx 13653$張照片

-第 65 頁-

(2) 蜘蛛山；北北東

第 10 章 學習的心態與診斷

略

第 11 章 數線、負數、絕對值

a. 數線與負數

-第 95 頁-

1. (1) -4 (2) -15

2. (1) 5000 (2) 78.5

3. A(-6.5)、B(1)、C(-3.5)、
   D(-2.5)、E(-2)

4. (1) 6 (2) -4 (3) 左邊；-1

(3) $5-7+5=3$，在原來的左邊；小蝸牛再以同樣模式移動後二次 :$(3-7+5)-7+5=1-7+5=-1$，即數線上的-1

b. 絕對值

-第 99 頁-

1. (1) 56 (2) 12 (3) 6、7、8、9
   (4) -2、-1、12

2. B − A

3. 10；6；3

4. (1) O (2) X (3) X (4) O (5) X
   (3)不可使用$|A|-|C|$表示其距離
   (5) A 與 B 距離爲 6 單位

c. 負整數的加減計算

-第 105 頁-

1. (1) -13 (2) -17 (3) -2
   (4) 5 (5) 9 (6) -26

2. (1) 65；55 (2) -4

(1) 藥鋪與爸爸原來位置距離$120-65=55$公尺

(2) 爸爸與爺爺距離 28 公尺、媽媽與叔叔距離 32 公尺，爸爸與爺爺的距離比媽媽與叔叔的距離多-4公尺

3. (1) 7 (2) 15 (3) $\overline{AD}$；26

4. (1) -339 (2) -164 (3) 750 (4) -39

d. 負整數的乘除計算、項的概念

-第 110 頁-

1. (1) -288 (2) 16(3) -18 (4) -25
   (5) 63

2. (1) 25 (2) 1120

(1) $50-25\times3=-25$

(2) $28\times(-40)=-1120$元

3. (1) 21 (2) 5

(1) $3\times\overline{BC}=3\times|-3-4|=3\times7=21$

(2) $\overline{AC}=|-11-4|=15$，$15\div3=5$段

4. (1) 51 (2) -48 (3) -30 (4) 1024
   (5) 2

e. 整數的四則計算與應用

-第 116 頁-

1. (1) -9 (2) 50 (3) -14 (4) 4 (5) -39

(1) $-30+21=-9$

(2) $(-5)\times(-10)=50$

(3) $-2-2-9-1=-14$

(4) $15-[4-(-7)]=15-11=4$

(5) $429\div(-3-8)=-39$

2. (1) -14970 (2) 975 (3) -140

(4) -9900

(1) $(-15)\times(1000-2)=15000-30=14970$

(2) $998+2+(-25)=975$

(3) $(-7)\times(35-15)=-140$

(4) $(-50\times2)\times(11\times3\times3)=-9900$

3. (1) 2 (2) 32；-24

(1) $(20000+3500+300+5200-5000)\div3000=2$

(2) 最大值:$(-4)\times(-8)=32$、最小值:$3\times(-8)=-24$

4. (1) -128 (2) 2 (3) 1990

(4) 賺；1470

(1)
$1+2-12+5-42+8-90=-128$

(2)$[-2+12]\div2+7=-5+7=2$

(3)$199\times\left((-3)+2\times6+1\right)=199\times10=1990$

(4)$(600+500+4\times396+7\times50+2\times10)-16\times99=1470+4\times396-16\times99=1470+99\times(4\times4-16)=1470$，賺 1470 元

單元練習

-第 118 頁-

§11.1. (a) -12 (b) 84；72；-4

(a)每增加一單位，記作+2，39 公斤減少 6 公斤，記作-12

(b)每減少一單位，記作-2，則乙記作+8實爲 84 分、丙記作-16實爲 72 分，三人平均$\frac{78+84+72}{3}=78$分，記作-4

§11.2. 9；-3

§11.3. (a) X (b) O (c) X (d) X (e) X

(d) 有±4、±3、±2、±1 及 0

§11.4. (a) 2 (b) 12；17

(a) $5+1-4=2$

(b) $\overline{AB}=|-5-7|=12$、$\overline{AC}=|-5-12|=17$

§11.5. (a) -15 (b) 53 (c) 46

(d) 2、3、4

(a) $7-22=-15$

(b) $3+5+45=53$

(c) $-5+6+7+\cdots+11=46$

§11.6. (a) -108 (b) 27 (c) 24 (d) 4

(a)$-(3\times72\div2)=-108$

(b) $(324\div4)\div3=27$

(c) $(-72)\div(-3)=24$

(d)(1) 不可以零除

(2) 1 爲最小正整數

(3) -1是最大正整數

§11. 7. (a) -160 (b) -146400

(c) -2093 (d) 900

(a) $(-2) \times (19 + 54 + 7) = -160$

(b) $-(244 \times (50 \times 12)) = -146400$

(c) $7 - 7 \times 300 = -2093$

(d) $(-9) \times (31 - 18 - 113) = (-9) \times (-100) = 900$

§11. 8. (a) -1 (b) 31

(a) $13 - 2 \times 7 = -1$

(b) 達到預期計畫:平均每天應生產 $(160 \times 31 - 171 - 168 \times 11 - 140 \times 6) \div 11 = (4960 - 171 - 1848 - 840) \div 11 = 191$個，每日比計畫多生產 31 個

§11. 9. (一艘潛艇在海平面下 272 英呎的地方，若以每分鐘 4 英呎速度向上浮升，則一個小時之後潛艇的位置在哪裡?)

一個小時候位置:$-272 + 4 \times 60 = -32$英呎，即潛艇在海平面下 32 英呎的位置

§11. 10. (擲骰子比賽中，使用一個骰子丟擲 15 次，每個點數如下表有它代表的分數。下表是擲骰子 15 次後的統計圖表，請問該表的換算分數是多少分?)

分數:$7 \times (-2) + 1 \times (-1) + 3 \times 0 + 1 \times 1 + 1 \times 2 + 2 \times 3 = -14 - 1 + 1 + 2 + 6 = -6$分

第 12 章 指數表示式

a. 整數的乘方

-第 126 頁-

1. (1) 729；216 (2) 64；256

(3) -125；-64 (4) 40

(4) $1+9-2-(-32)=40$

2. (1) 5^3 (2) 7^3

3. $(-5)^8$；$(-4)^7$

4. (1) 1024 (2) 1024 (3) 1024 (4) 1024

b. 十進位表示式

-第 130 頁-

1. (1) $2\times10^4+3\times10^3+5\times10^2+3$
(2) $3\times10^{-1}+2\times10^{-2}+5\times10^{-3}+7\times10^{-4}$

(3) $1\times10^6+2\times10^5$

(4) $6\times10^{11}+3\times10^{10}+2\times10^9+5\times10^8$

2. (1) 0.8205 (2) 3.14159 (3) 650.05

3. (1) 4；15 (2) 2；4；11

4. $7\times10^{10}+8\times10^9+9\times10^8+6\times10^7+5\times10^6+4\times10^5+3\times10^4+5\times10^3+6\times10^2+7\times10^1+9$

c. 10 的指數式的轉換

-第 132 頁-

1. (1) 0.62 (2) 0.9 (3) 13200

2. (1) -1 (2) -6 (3) 3

3. (1) $\frac{1}{100}$ (2) 100 (3) 1

4. (1) 10^2 (2) 10^4 (3) 10^{-2}

d. 科學記號

-第 134 頁-

1. (2)、(3)、(4)、(5)、(7)

2. (1) 3.4×10^6 (2) 10^{-5}

(3) -2×10^{-3}

3. (1) 2×10^{-2} (2) 1.25×10^{-1}

(3) 8×10^{-2}

4. (1) $<$ (2) $<$ (3) $<$

e. 指數記數法下的大小關係

-第 140 頁-

1. (1) $>$ (2) $>$ (3) $>$

2. (1) $<$ (2) $>$ (3) $=$

3. (1) $=$ (2) $<$ (3) $<$

4. (1) B (2) 3×10^2

單元練習

-第 142 頁-

§12. 1. (a) -24 (b) 145 (c) 512

(a) $-25+1-25+25\times1=-24$
(b) $-7+25\times5-(-27)=145$

§12. 2. (a) 14 (b) 4；2

(b) $1.13\times10^6=1130000$；

$1.12\times10^{-3}=0.00112$

§12. 3. (a) 1000 (b) 100 (c) 74000

§12.4.(a) 8.659×10^7(b) 2×10^{-3}

(c) 1.258×10^{-1}

§12.5.(a) 1.444×10 (b) 1.25×10^2

(c) 2.4×10^{10}

§12.6.(a) $>$ (b) $<$ (c) $>$ (d) $<$

§12.7.(a) 1.15×10^{11}

(b) 1.48×10^8；310000

§12.8. (有一隻大象重一萬磅，請用 10 的指數表示式表示 10000。)

10^4

§12.9. (月球重7347700×10^{16}公斤，請用科學記號表示它。)

7.3477×10^{22}公斤

§12.10. (有一台電腦的處理器每10^{-9}秒可以處理一個運算，那麼執行 7.5 百萬的指令需要多少時間?(請用科學記號表示)

共需花 $7500000 \times 10^{-9} = 7.5 \times 10^{-3}$ 秒

第 13 章 質因數分解

a. 指數記法與標準分解式

-第 147 頁-

1. (1) $2^2\times3^2\times5\times7$ (2) $3^2\times7\times13$

   (3) $2^5\times5\times17$

2. (1) $2^5\times3^2\times5\times41$ (2) $2^2\times5^3\times7$

   (3) $2^2\times3^6\times5$

3. $2^4\times3^2\times5$；3；2、3、5

4. 2；2；8；

2、3、5、7、11、13、17、19、23、29、31、37、41、43、47、53、59、61、67、71、73、79、83、89、97

b. 常用倍數的判別法

-第 155 頁-

1. (2)(4)(5)(6)；(3)(6)

2. (2)(3)(4)(5)；(1)(4)(6)

3. (1) 2、5、8 (2) 4 (3) 5

(1) 19 + □是 3 的倍數

(2) 22□被 8整除

(3)可被 3 整除:4 + □爲 3 的倍數，□可能爲 2、5、8；同時可被 7 整除，將 621、651、681 除上 7 檢查，則□爲 5

4. 33；14；4

(1)3 的倍數:$\frac{100}{3}=33.3..$，共 33 個

(2)7 的倍數:$\frac{100}{7}=14..$，共 14 個

(3)即 21 的倍數，$\frac{100}{21}=4..$，共 4 個

c. 標準分解式與因數關係

-第 159 頁-

1. (1)(5)

質因數分解: $2^5\times11$，故因數(1)(5)

2. (3)(4)(6)

3. (1) 1、2、3、2^2、 2×3、7、$2^2\times3$、2×7、3×7、$2^2\times7$、$2\times3\times7$、$2^2\times3\times7$ (2) 1 (3) 8

(2) 30 質因數分解:$2\times3\times5$，18 質因數分解:2×3^2，故 3 爲一次方(3) 長度:1、2、2^2、2^3、19、2×19、$2^2\times19$、$2^3\times19$，共 8 種(其實也是問因數有多少)

4. (1) 2；8 (2) 4；180

(1) 質因數分解:$2^3\times7$，因數:$4\times2=8$個(2) 因數:$6\times5\times3\times2=180$個

d. 最大公因數及最小公倍數

-第 166 頁-

1. (1) 6；1260 (2) 5；5460

   (3) 6；336

2. (1) $3^3\times13^2$ (2) 17^2

   (3) $2^4\times3^2\times5^2\times17^4$

   (4) $2^3\times3^2\times5\times7^4\times17^5$ (5) 2×3

(5)$(2^5\times3^2, 2^2\times3\times5^2, 2\times3^5) = 2\times3$

3. (1) O (2) O (3) X (4) X

4. 12；84

[28,21]=84，長並排 3 個、寬直排 4 個，即可排出 84x84 公分的正方形，共需 12 塊積木

e. 質數的判別法

-第 170 頁-

1. (1) O (2) O (3) O

(1)除 2 外不會再出現偶數的質數，故不會再連續出現質數

2. (1) 14；是(2) 15；不是

(2) $247 = 13\times19$

3. (1) 67；73 (2) 103；109

4. (乙)(丙)(己)

單元練習

-第 171 頁-

§13.1. (a) $2^5\times3\times5^2\times7^2$

(b) $2^2\times7^2\times13$

(c) $2^2\times5\times67$

§13.2. (a) 148

(b) 1547、117117、23562

(c) 187、10615、117117、23562

§13.3. (a) 2、8 (b) 924

(a) 它同時爲 3 與 4 的倍。爲 3 的倍數，則 22+□需爲 3 的倍數，□可爲 2、5、8；爲 4 的倍數:則□可爲 0、2、4、6、8，故□有可能爲 2、8

(b) 糖果數量爲 84 的倍數，袋中最多 $\frac{1000}{84} = 11\ldots$，$11\times84 = 924$顆糖果

§13.4. (丁)(戊)

§13.5. (a) 2^4 (b) 3×23^2

(c) 4 (d) 2×7

§13.6. (a) $2^4\times3^4\times5\times11^2$

(b) $2^3\times11^2\times13\times17^3$

(c) 2808

(d) $2^3\times5^2\times7^3\times11$

§13.7. (a) (甲)(丙)(戊) (b) (甲)(戊)

§13.8. 10；36；13；0

(1)取 12 分鐘與 36 分鐘的最小公倍數，即 36 分鐘，10 點 36 分兩則廣告會一齊播放

(2)最小公倍數:180 分，即 13:00 三則廣告會一齊播放

§13.9. ((a)請找出 42,72 和 216 的最大公因數與最小公倍數 (b) $5^2\times7^4$有多少因數，請列出來。)

(a)最大公因數:6、最小公倍數:1512

(b)共有$3\times5 = 15$個因數，1、5、7、5^2、5×7、$5^2\times7$、7^2、5×7^2、$5^2\times7^2$、7^3、5×7^3、$5^2\times7^3$、7^4、5×7^4、$5^2\times7^4$

§13.10. (花籃裝滿了紅色、白色與粉紅色的玫瑰，且每一籃都會有相同數量的三色玫瑰花。若現在有紅玫瑰 252 朵、白玫瑰 216 朵、粉紅玫瑰 396 朵，則可以裝幾籃花籃?每一籃的粉紅玫瑰是多少朵?)

三色玫瑰最大公因數:36 朵，即可以裝 36 籃。每籃可以裝 7 朵紅玫瑰、6 朵白玫瑰、11 朵粉紅玫瑰

§13.11. (烏瑪和薇薇安和緹娜是三姊妹，他們各自在外生活。烏瑪每 21 天回家探望父母、薇薇安則是每 45 天回家一趟，而緹娜是每 30 天返家探望父母。他們將在三月二日一齊回家探望父母，則下次他們一齊回家探望父母是幾月幾號?)(不需考慮閏年)

三姊妹回家的最小公倍數:630 天，$630-365=265$，即隔年的 3 月 2 日後的 265 天，下次回家 3 月有 29 天、4 月有 30 天、5 月有 31 天、6 月有 30 天、7 月有 31 天、8 月有 31 天、9 月有 30 天、10 月有 31 天，共 243 日，即隔年的 11 月 22 日

第 14 章 未知數、多項式、方程式

a. 以符號列式(代數式)

-第 179 頁-

1. (1) $x+22$ (2) $\frac{6\cdot x}{2}$ (3) $\frac{y}{12}$ (4) $28y$

2. (1) $15-2x$ (2) $\frac{88+92+y}{3}$

   (3) $30w+12$ (4) $\frac{4}{5}x-1$；$\frac{5}{4}(y+1)$

3. (1) 4 (2) 5.4 (3) 188 (4) $4y-5$

   (5) 1.14

(1) $3\cdot 3-5=4$

(2) $\frac{-7.2}{4}+(-(-7.2))=-1.8+7.2=5.4$

(3) $14\cdot 14-14+6=188$

(4) $12\cdot\frac{1}{3}\cdot y-15\cdot\frac{1}{3}=4y-5$

(5) $\frac{(1.2+0.7)\cdot 1.2}{2}=1.14$

4. (1) $x+12$ (2) $x-\frac{9}{10}x$ (3) 160；144

阿勇:$172-12=160$公分，阿橋:$\frac{9}{10}\cdot 160=144$公分

b. 項與一元一次式

-第 183 頁-

1. (甲)(丙)

2. (1) 32；128 (2) -1；2 (3) 0；-12

3. (1) 二；四(2) 一；五(3) 一；二

   (4) 二；二(5) 一；一

4. (1) 36π (2) $\frac{20000}{t}$；$\frac{200}{3t+5}$

(2) 200 公尺等於 20000 公分，共需$\frac{20000}{t}$秒；提升速率後共需$\frac{200}{3t+5}$秒

c. 一元一次式的化簡

-第 190 頁-

1. (1) $\frac{a}{bc}$ (2) $\frac{ac}{b}$ (3) $\frac{a}{b+c}$ (4) $\frac{a}{2b}-c$

2. (1) x^5 (2) $xy+\frac{x}{2}$ (3) $-\frac{150x^3}{3}$

3. (1) $4x-4$ (2) $2x-4$ (3) $2x-2$

   (4) 478

4. (1) $-2x-15$ (2) $-4x$ (3) $\frac{3}{4}x$

   (4) $-\frac{1}{4}x$ (5) $-15x$ (6) $14-14x$

   (7) $\frac{5x+1}{3}$ (8) $\frac{11x-13}{10}$

(7) $\frac{6x}{3}-\frac{x-1}{3}=\frac{6x-x+1}{3}=\frac{5x+1}{3}$

(8) $\frac{5(x-1)-2(4-3x)}{10}=\frac{5x-5-8+6x}{10}=\frac{11x-13}{10}$

d. 天平和方程式、(解)一元一次方程式

-第 202 頁-

1. (1) $x=-7$ (2) $x=\frac{3}{5}$

2. (1) $x=-\frac{3}{10}$ (2) $x=\frac{8}{3}$ (3) $x=\frac{-5}{3}$

   (4) $x=\frac{1}{21}$

3. (1) $80=4x+4$ (2) $\frac{x+2}{10}=\frac{x-5}{9}$

4. (1) $\frac{5x-3}{2}$ (2) 21；9

$x+\frac{5x-3}{2}=30\Rightarrow\frac{7x-3}{2}=30\Rightarrow x=9$，乙數爲 9，甲數爲 21

e. 應用問題

-第 212 頁-

1. 80

假設 5 個連續偶數爲: $2x$、$2x+2$、$2x+4$、$2x+6$、$2x+8$，

則$2x+8=(2x)\cdot 2-4$

$\Rightarrow x=6$。

連續 5 個偶數爲:12、14、16、18、20，總和爲 80

2. 14

假設全班及格同學共有x人、不及格共有$35-x$人，則全班總分:

$$35\times 64=(35-x)\cdot 52+82x$$

$\Rightarrow x=14$，即及格共有 14 人

3. 126

三角形面積: $3x\cdot 14\cdot\frac{1}{2}=21x$；長方形面積: $2x\cdot 12=24x$，

則$21x=24x-18$

$\Rightarrow x=6$。

三角形面積: $21x=21\cdot 6=126$平方公分

4. 85

蛋糕定價:$200\cdot 130\%=260$元，假設老闆打x折，則$260\cdot x=200+21$

$\Rightarrow x=0.85$，即 85 折

5. 34；66

假設每題 2 分的有x題，則每題 3 分的有$x+5$題，得式子:

$$100=2x+3(x+5)$$

$$\Rightarrow x=17。$$

選擇題有 17 題共 34 分，填充題有 22 題共 66 分

單元練習

-第 215 頁-

§14.1. (a) 二元一次式

(b) 二元一次方程式

(c) 一元一次方程式

(d) 一元三次式

(e) 二元二次方程式

§14.2. (a) $6x+2$ (b) $-5x+16$

(c) -1 (d) $\frac{7x-5}{6}$

§14.3. (a) $\frac{3900}{3a-30}$ (b) $\frac{1}{5}x+\frac{2}{3}x+56=x$

§14.4. (a) $x=-2$ (b) $x=-3$

(c) $x=-\frac{3}{5}$

§14.5. 34

設短繩x公分，則長繩爲$3x-6$公分。則長繩的一半長 12 公分，$\frac{3x-6}{2}=12$

$\Rightarrow x=10$。

則繩長: $x+3x-6=4x-6$ 將$x=10$代入，則繩長 34 公分

§14. 6. 23

令連續 6 個正奇數:

$2x-5$、$2x-3$、$2x-1$、$2x+1$、$2x+3$、$2x+5$，且$x>3$。

則$4(2x+5)=(2x-5+2x-3+2x-1+2x+1+2x+3)-3$

$\Rightarrow x=14$，6 個連續正奇數:23、25、⋯、33

§14. 7. 3200；2820

設商品定價 x 元，則成本:

$$0.85x+100=0.9x-60$$

$$\Rightarrow x=3200。$$

則成本: $3200\cdot 0.9-60=2820$

§14. 8. (a) $\frac{27}{5}$ (b) $3n+20$

(b) $6\left(\frac{n}{2}+3\right)+2=3n+20$

§14. 9. (弗雷德想要購買 12 枝藍筆和 8 枝紅筆。每枝藍筆比紅筆貴了 8 元，若每枝紅筆是x元，則弗雷德共會花了多少錢?)

則藍筆爲$x+8$，共花$8x+12(x+8)=20x+96$元

§14. 10. (有兩個數的和是 18，差是 6。則這兩數分別是?)

設一數x，另一數$18-x$，則兩數差:

$$x-(18-x)=6$$

$\Rightarrow x=12$，則兩數爲 12、6

§14. 11. (有家計程車收費方式是一趟 80 元，每分鐘額外加收 5 元。如果莉莉總共帳單是 325 元，則她搭了幾分鐘的計程車?)

設莉莉搭了x分鐘的車，

則$80+5x=325$

$\Rightarrow x=49$，即她搭了 49 分鐘的車

第 15 章 圖的複製

a. 平面圖形的複製

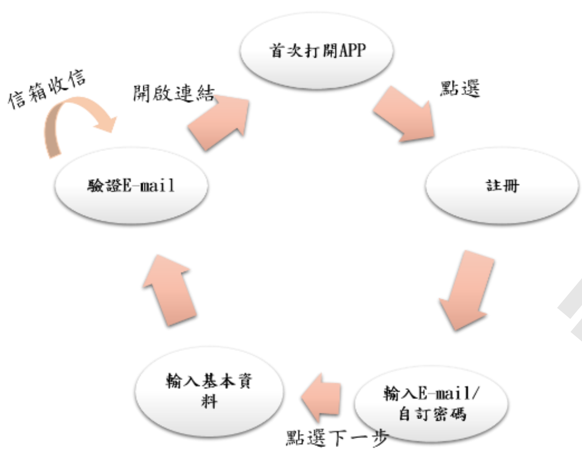
-第 219 頁-

略

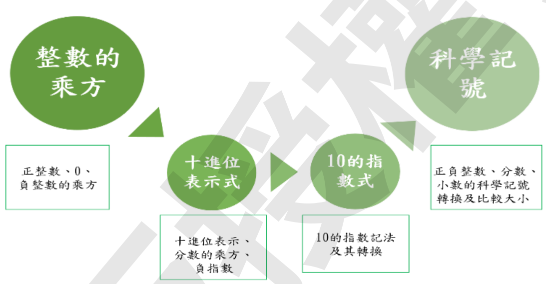
b. 資料流程圖

-第 226 頁-

(1)參考答案:



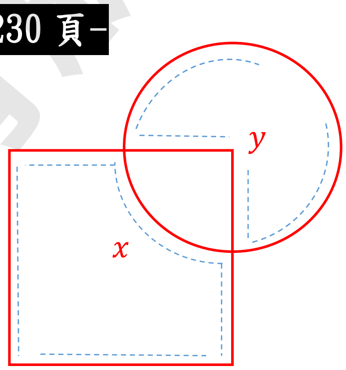
(2) 參考答案:



c. 文字轉譯圖形與表格

-第 230 頁-

(1)



(2)

2/1	2/2	2/3	2/4	2/5
甲	甲	甲		乙
2/6	2/7	2/8	2/9	2/10
丙	丙丁		甲乙丙	

d. 心智圖

-第 233 頁-

略

e. 立體圖形繪製

-第 235 頁-

略

第 16 章 綜合訓練

a. 關鍵字訓練

-第 239 頁-

去贅字

(1) 步行走

(2) 宛如像

(3) 不是沒有

(4) 或許可能

(5) 內；好

(6) 老是

(7) 那個

(8) 大約；左右

(9) 自己本身

(10) 許許多多

(11) 考試

(12) 購買

(13) 困難；很多各式各樣；內容

(14) 但是由於

(15) 但在那之前也要先

(16) 種類；是會

-第 241 頁-

關鍵字

(1) 圖(七)/非

(2) 絕對值/小於 5/整數

(3) 甲的位置/數線

(4) 冬天/漁夫帽/針織/單色/一千到二千

(5) 三日內得退票

(6) 認購愛心餐點

(7) 詐騙案件/不會致電與發送簡訊

(8) 2/1 日起本店吐司類早餐全面調漲 5 元

(9) 1/1(六)06:00-20:00 暫停服務/粉絲專頁

(10) 每 5 分鐘會分裂成 2 個/2 個細菌/一個小時後

(11) 鈍角三角形/一角大於90°

因一角大於90°，必然剩下兩角小於90°

(12) 品牌/名稱、符號、圖像設計、術語/組合/產品的特色/區隔

-第 242 頁-

關鍵字

(1) B 美麗的夜晚只剩下蝴蝶在花朵穿梭

(2) A (D)→(C)→(B)

(3) C (D)→(A)→(B)

(4) D (B)→(A)→(C)

(5) A 本收據請妥爲保管以便日後查考

(6) A 這部電影不同於原來小說的劇情

(7) C (D)→(A)→(B)

(8) C (B)→(D)→(A)

(9) D 人的能力就像肌肉透過鍛鍊才能強韌

(10) A 煙霧濛濛中，我們站在草原上櫛風沐雨

(11) B (A)→(C)→(D)

(12) C (B)→(D)→(A)

(13) C (B)→(D)→(A)

(14) A (B)→(D)→(C)

(15) C (D)→(A)→(B)

-第 244 頁-

類比

(1) C (2) B (3) C (4) A (5) B

(6) D (7) D (8) D (9) B (10) A

(11) D (12) B (13) C (14) D (15) C

(16) B (17) D (18) A (19) C (20) B

(21) B (22) D (23) C (24) C

b. 強記訓練

-第 249 頁-

(1~5)20、12、24、25、14

(6~10)24、18、35、16、49

(11~15)18、63、27、12、42

(16~20)10、9、30、64、6

(21~25)36、32、21、36、40

(26~30)81、6、27、30、56

(31~35)63、12、16、25、15

(36~40)64、63、8、8、24

(41~45)42、40、45、7、56

(46~50)32、15、72、9、25

(51~55)28、42、36、48、18

(56~60)54、24、45、28、12

-第 250 頁-

(1~5)30、21、35、36、24

(6~10)36、3、48、27、64

(11~15)28、8、28、20、56

(16~20)18、48、42、81、12

(21~25)49、45、32、4、54

(26~30)9、14、36、42、72

(31~35)63、15、18、36、24

(36~40)72、56、18、15、35

(41~45)56、54、48、16、40

(46~50)45、24、9、16、36

(51~55)40、56、5、63、24

(56~60)56、36、30、40、12

-第 251 頁-

(1~5)38、75、965、18、875

(6~10)78、772、989、87、56

(11~15)32、81、480、676、779

(16~20)375、43、61、559、271

(21~25)39、34、655、23、16

(26~30)89、324、269、112、889

(31~35)911、968、819、726、86

(36~40)446、39、361、569、217

-第 252 頁-

(1~5)59、65、875、11、579

(6~10)71、793、929、67、77

(11~15)42、39、180、901、701

(16~20)658、53、16、658、461

(21~25)79、63、281、41、34

(26~30)29、616、223、612、582

(31~35)875、635、869、234、72

(36~40)271、757、804、639、686

-第 254 頁-

partI:

(1~5)361、11^2、256、22^2、625
(6~10) 26^2、289、21^2、529、24^2
(11~15) 12^2、29^2、729、13^2、17^2
(16~20)、20^2、324、28^2、23^2

partII:

(1~5)484、27^2、225、17^2、196
(6~10) 12^2、529、29^2、841、24^2

(11~15)121、19^2、324、15^2、22^2
(16~20)169、23^2、676、20^2、28^2

-第 255 頁-

partI:

(1~5)32、2^8、81、512、3^5
(6~10) 2^{10}、128、25、625、3^6
(11~15)8、5^3、16、2^9、3^4

partII:

(1~5) 2^3、3^5、5^3、128、3^6
(6~10) 2^5、8、81、512、2^8
(11~15)27、729、625、2^6、2^4

-第 257 頁-

partI:

(1~5)0.6、$\frac{7}{8}$、0.05、0.35、$\frac{1}{4}$

(6~10) $\frac{9}{20}$、0.75、0.65、0.25、$\frac{3}{50}$

(11~15)0.375、0.8、0.85、$\frac{1}{100}$、$\frac{1}{8}$

partII:

(1~5)0.2、$\frac{3}{8}$、0.625、0.75、$\frac{9}{20}$

(6~10) $\frac{3}{5}$、0.15、0.8、0.1、$\frac{3}{50}$

(11~15)0.85、0.02、0.025、$\frac{4}{5}$、$\frac{1}{40}$

-第 259 頁-

partI:

(1~5)65、72、76、75、112
(6~10)104、108、105、38、91
(11~15)48、70、52、51、90

(16~20)95、72、85、96、34
(21~25)90、64、98、117、120

partII:

(1~5)84、91、54、64、119
(6~10)112、39、60、57、105
(11~15)48、56、108、90、85

(16~20)72、38、36、117、84
(21~25)45、51、72、135、80

c. 圖形關係訓練

-第 260 頁-

(1) A

(2) B 無論何種邊形箭頭皆往左右

(3) D

(4) A 除圓之外，外與內邊圖形邊數差 1

(5) C

(6) B

(7) A

(8) B

(9) A

(10) C

(11) D

(12) B (B)俯視圖及左視圖

d. 數感訓練

-第 262 頁-

(1) C 將前兩數相加

(2) A 前後數相減以 0、1、2…增加

(3) D 以 7 等差增加

(4) C 前後兩數差以倍數增加

(5) A 頭尾以 25、26、27..與 29、30、31..間隔排列

(6) B 前後數差以 3、5、7…增加

(7) A 一邊以 9、10、11..增加，一邊以 1、3、5…交錯

(8) C 數字差:25、27、29…

(9) B 依「質數」順序

(10) C 前後數字差依質數排列

(11) D 以 0、1、2、3…的三次方增加

(12) B 分子與分母分開依前兩項之和增加

(13) B 分子以2^{-1}、2^{0}、2^{1}…增加；分母以3^{0}、3^{1}、3^{2}…增加

(14) B 原以 111、113、115…增加，遇到 3 的倍數以 0 替換

(15) D 以 0 和 1 組成的數字表示法，即 2 進位表示法。000 即 0、001 即 1、001+1=010 即 2、010+1=011 即 3⋯

(16) B 前面代表分母後面代表分子，即$\frac{1}{2}$、$\frac{2}{4}$、$\frac{3}{6}$、$\frac{6}{12}$

(17) C 前面代表分子後面代表分母，即$\frac{4}{10}$、$\frac{2}{5}$、$\frac{6}{15}$

(18) C 前數字增加、後數字減少

(19) A

37 歲屬牛、36 屬虎、35 屬兔、34 屬龍、33 屬蛇、32 屬馬、31 屬羊、30 屬猴、29 屬雞、28 屬狗，推 59 屬兔

(20) D 甲減少後丙逐漸增加

(21) A 前依春夏秋冬，後依上中下排列

(22) D 上下、左右相加會等於中央

(23) C 字母倒序

(24) D 前按字母順序，後以倒過來間隔方式排列

(25) A

前字母 3 的倍數跳過、中以 3 的倍數字母排列、後從 y 開始倒數

(26) C

(27) B

(28) A 紅、黃、橘、藍、白、綠、黃循環

(29) B

(30) A

(31) D 四個數字和 12

(32) B 前二數相加與後兩數相加的差爲尾數，(6+0)-(7+5)=-6

(33) D 將 3、3、3 和 4、4、4 進行拆分

(34) A 將 4 個 1、3 個 2、1 個 4、2 個 8 拆分

(35) B 分:15 的倍數

(36) C 分:12 的倍數

(37) C (C)的開頭:0800

(38) A

(39) B 年(末兩位)/月/日、月/日/年，年不放中間

(40) D A~Z 分配至 1~9，AB-1、CDE-2、FGH-3、IJK-4、LMN-5、OPQ-6⋯

e. 抽象能力訓練

-第 267 頁-

(1) D 13~21，9 個數填入九宮格中，任一直線和爲 51

(2) C 任一直線和爲 60

(3) B 右表格是左表格增加 3

(4) A 爸爸→媽媽→客人

(5) D (D)0☆1=0，其餘:1

(6) B

6423 $\boxed{\text{MNO}}\boxed{\text{GHI}}\boxed{\text{ABC}}\boxed{\text{DEF}}$，可能爲 nice

(7) B

甲蛙:第 1 層、第 3 層、第 5 層、第 7 層；

乙蛙: 第 16 層、第 13 層、第 10 層、第 7 層，兩蛙第三次在第 7 層相遇

(8) A

(9) D (D)應爲 ck6354

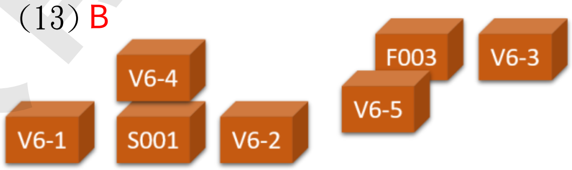
(10) D 排列可能爲「陳林王黃」或「黃王林陳」，(D)林家左方也可能是王家

(11) C

延	廷	延	延	延	延	延
延	延	延	延	延	延	延
延	延	延	延	延	延	延
延	延	延	延	延	延	延
延	延	延	延	延	廷	延
延	延	延	延	延	延	延
延	延	廷	延	延	延	延

(12) B $\frac{46}{49} \approx 94\%$

(13) B



(14) A

(15) C

(16) D 數學及格−二科及格

$= 28 - 18 = 10$人

(17) C 英文及格−二科及格

$= 25 - 18 = 7$人

(18) C 即二圈之外:

$42 - (7 + 18 + 10) = 7$人

(19) D 兩國都去過:$55 - 29 = 26$人

去過日本但沒去過韓國:

$72 - 26 = 46$人

(20) A $200 - (29 + 26 + 46) = 99$人

(21) B 共有 49 隻貓，可以抓:

$49 \times 7 = 343$隻老鼠

(22) D 343 隻老鼠共會吃價值 49 元小麥，共損失 16807 元

(23) D 上兩層$\times 3$、中兩層$\times 3$、下兩層$\times 3$

(24) B 1×1、2×2、3×3、4×4

(25) C

1×1共 16 個、2×2共 9 個、3×3共 4 個、4×4共 1 個，共可數出 30 個正方形

※本書如發現有缺頁、漏印、印製汙損等情形，請來信告知，我們將迅速爲您服務。造成讀者不便，本公司誠摯深表歉意。

編著者:杲踹文化有限公司

出版者:杲踹文化有限公司

客服信箱: service@gotry.com.tw

官網/勘誤:www.gotry.com.tw

版本:2022 版 v1

清淨心 • 平等心 • 覺悟心